Особенности тока через джозефсоновский контакт в переменном внешнем поле

Царев Павел

Август 2023

1 Модель и основные уравнения

Стационарный эффект Джозефсона заключается в том, что ток течет через слабый контакт бездиссипативно. В общем случае он описывается ток-фазовым соотношением

$I_s = I(\varphi)$, а в простейшем случае $I_s = I_1 \sin\varphi$

Нестационарный эффект Джозефсона заключается в появлении джозефсоновской генерации - напряжения, периодически зависящего от времени. Эффект появляется, когда величина тока превышает некоторое критическое значение. В этом случае ток I разделяют на нормальную и сверхпроводящую комопненту, что приводит к использованию резистивной модели

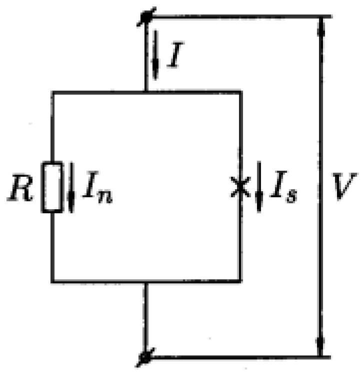

Рис. 1: Схема резистивной модели

Обозначим $\omega_0 = \dfrac{2eI_1R}{\hbar}$

И введем безразмерные величины: $\tau = \omega_0 t \qquad j = I/I_1 \qquad v = \dfrac{V}{I_1R}$

В этих обозначениях уравнения резистивной модели выглядят так:

$$v = \frac{d\varphi}{d\tau} \qquad\qquad \frac{d\varphi}{d\tau} + \sin\varphi = j \tag{1}$$

Если заданный ток $j < 1$, то $I_n = 0$ и $\varphi = \arcsin j = const$. Если $j > 1$:

$$\varphi(\tau) = 2\arctan\left[\frac{1 + \nu\tan(\nu\tau/2)}{\sqrt{\nu^2+1}}\right] + 2\pi n$$

$$v(\tau) = \frac{j^2 - 1}{j + \cos(\nu\tau - \alpha)}$$

Здесь использованы $\nu = \sqrt{j^2-1}$, $\quad \cos\alpha = 1/j$, $\quad \sin\alpha = \pm\sqrt{j^2-1}$

2 Режим заданного напряжения

Пусть есть внешний периодический сигнал:

$$v(\tau) = v_{dc} + v_{ac}\cos(\Omega\tau), \text{ где } \qquad \overline{v} = v_{dc} = \frac{V_{dc}}{I_1 R}, \qquad v_{ac} = \frac{V_{ac}}{I_1 R}$$

Тогда из (1) находим $\varphi(\tau) = \Delta\varphi + v_{dc}\tau + \frac{v_{ac}}{\Omega}\sin(\Omega\tau)$
$\Delta\varphi$ - разность фаз внешнего излучения и джозефсоновской генерации

Пусть теперь в ток-фазовом соотношении есть 2 гармоника:
$j(\varphi) = \sin\varphi + A\sin 2\varphi$

Тогда

$$j(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\frac{v_{ac}}{\Omega})\sin((v_{dc}+k\Omega)\tau + \Delta\varphi) + A\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\frac{2v_{ac}}{\Omega})\sin((2v_{dc}+k\Omega)\tau + 2\Delta\varphi)$$

Если $2v_{dc} = -(2n+1)\Omega, n \in \mathbb{Z}$, то $\qquad \overline{j} = AJ_{2n+1}(\frac{2v_{ac}}{\Omega})\sin 2\Delta\varphi$

Это значит, что при одном и том же значении $\overline{v} = -(n+1/2)\Omega$ возможны разные значения $\overline{j}$, и если построить график $\overline{v}$ от $\overline{j}$, то мы увидим ступеньки как на (рис.2). Это и есть ступеньки Шапиро.

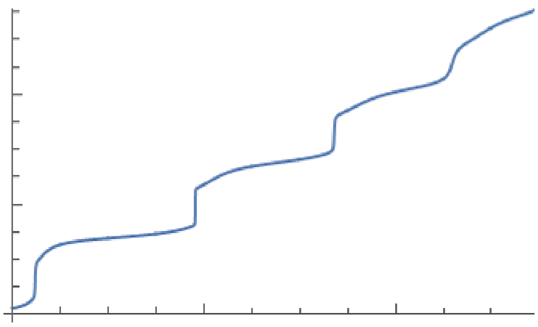

Рис. 2: Ступеньки Шапиро. По оси абсцисс отложен j_{dc}, по оси ординат v_{dc}

В рассмотренном примере есть целые ($\overline{v} = n\Omega \in \mathbb{Z}$) и полуцелые ($\overline{v} = (n + 1/2)\Omega$) ступеньки, более дробных ($\overline{v} = \dfrac{n}{m}\Omega, m > 2$) нет.

Если бы мы взяли m гармоник, то столько же ступенек бы и получили.

Далее будет рассматриваться режим заданного тока. Известно, что если в этом режиме ток-фазовое соотношение состоит только из 1 гармоники, то возникают только целые ступеньки [1], а если из 2 гармоник, то целые и полуцелые. Численное решение уравнения подтверждает результат для 1 гармоники, но в случае 2 гармоник возникают **все** дробные ступеньки. Моей задачей является подтвердить результаты моделирования аналитически и посчитать размер ступенек Шапиро.

3 Режим заданного тока. Только одна гармоника

$I_{dc} + I_{ac}\cos\Omega\tau = I_1 \sin\varphi + \frac{V}{R}$

$j_{dc} + j_{ac}\cos\Omega\tau = \sin\varphi + \dfrac{d\varphi}{d\tau}$

Переобозначим время $u = \omega t$ вместо $\tau = \omega_0 t$

$\dfrac{\omega_0}{\omega} j_{dc} + \dfrac{\omega_0}{\omega} j_{ac}\cos u = \dfrac{\omega_0}{\omega}\sin\varphi + \dfrac{d\varphi}{du}$

Обозначим $A_{dc} = \dfrac{\omega_0}{\omega} j_{dc}$, $A_{ac} = \dfrac{\omega_0}{\omega} j_{ac}$ и $A_1 = \dfrac{\omega_0}{\omega}$

$A_{dc} + A_{ac}\cos u = A_1 \sin\varphi + \dfrac{d\varphi}{du}$

Точно это уравнение решить нельзя. Будем пытаться решить его с помощью теории возмущений с обратной связью. Пусть A_1 достаточно маленькое (по сравнению с чем именно будет установлено позже).

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + ... \qquad A_{dc} = A_{dc}^{(0)} + A_{dc}^{(1)} + A_{dc}^{(2)} + ... \tag{2}$$

Это значит, что сначала мы будем находить поправки к φ, а потом корректировать A_{dc} так, чтобы $\quad \overline{\dfrac{d\varphi_1}{du}} = 0, \quad \overline{\dfrac{d\varphi_2}{du}} = 0...$

Используя разложение (2), в первых трех порядках получим уравнения

(0): $\qquad A_{dc}^{(0)} + A_{ac}\cos u = \dfrac{d\varphi_0}{du}$

(1): $\qquad A_{dc}^{(1)} = A_1 \sin\varphi_0 + \dfrac{d\varphi_1}{du}$

(2): $\qquad A_{dc}^{(2)} = \varphi_1 * A_1 \cos\varphi_0 + \dfrac{d\varphi_2}{du}$

$$v_1 \propto \frac{d\varphi_1}{du} = A_{dc}^{(1)} - A_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(A_{ac}) \sin\left((A_{dc}^{(0)} + k)u + \Delta\varphi\right)$$

Рассмотрим $A_{dc}^{(0)} \notin \mathbb{Z}$. Тогда $\overline{\frac{d\varphi_1}{du}} = A_{dc}^{(1)}, \;\; => \;\; A_{dc}^{(1)} = 0$

Теперь, зная, что $A_{dc}^{(1)} = 0$, рассмотрим $A_{dc}^{(0)} = n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\overline{\frac{d\varphi_1}{du}} = -A_1 J_n(A_{ac}) \sin\Delta\varphi$

Это значит, что если $A_{dc}^{(0)} = n \in \mathbb{Z}$, наша теория возмущений неприменима. Но при этом мы можем найти амплитуду (полуширину) $n^{\text{ой}}$ ступеньки - она равна $A_1 J_n(A_{ac})$

Итак, если $A_{dc}^{(0)} \notin \mathbb{Z}$, то можно найти φ_1 в явном виде:

$$\varphi_1 = A_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(A_{ac}) \frac{\cos\left((A_{dc}^{(0)} + k)u + \Delta\varphi\right)}{A_{dc}^{(0)} + k} \text{ если } A_{dc}^{(0)} \notin \mathbb{Z}$$

Чтобы φ_1 было мало, нужно потребовать $\frac{A_1}{A_{dc}^{(0)}} = \frac{I_1}{I_{dc}} << 1$. Это и есть требование на малость A_1, имеющее наглядную физическую интерпретацию: джозефсоновский ток должен быть много меньше, чем постояная компонента внешнего тока.

$$\frac{d\varphi_2}{du} = A_{dc}^{(2)} - \frac{1}{2} A_1^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(A_{ac}) J_{k+l}(A_{ac}) \frac{\cos\left((2A_{dc}^{(0)} + 2k + l)u + 2\Delta\varphi\right) + \cos(lu)}{A_{dc}^{(0)} + k + l}$$

Если $2A_{dc}^{(0)} \notin \mathbb{Z}$, то $\overline{\frac{d\varphi_2}{du}} = A_{dc}^{(2)} - (A_1)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(A_{ac}) \frac{1/2}{A_{dc}^{(0)} + k}$

Из условия $\overline{\frac{d\varphi_2}{du}} = 0$ находим $A_{dc}^{(2)}$

Если $2A_{dc}^{(0)} =$ нечетное n, то $\overline{\frac{d\varphi_2}{du}} = (A_1)^2 \cos 2\Delta\varphi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{J_k(A_{ac}) J_{-n-k}(A_{ac})}{n + 2k} = 0$

Это означает, что полуцелых ступенек нет. Кроме того, ступенек с $m = 3$ тоже не будет, и это будет показано в следующем разделе.

4 Режим заданного тока. Теперь 2 гармоники

С учетом 2 гармоники исходное уравнение будет выглядеть так:

$$A_{dc} + A_{ac} \cos u = A_1 \sin\varphi + A_2 \sin 2\varphi + \frac{d\varphi}{du}$$

Будем строить теорию возмущений с обратной связью по $A_1 << A_{dc}^{(0)}$ и $A_2 << A_{dc}^{(0)}$

Используя разложение (2), в первых трех порядках получим уравнения

$$(0): \qquad A_{dc}^{(0)} + A_{ac}\cos u = \frac{d\varphi_0}{du}$$

$$(1): \qquad A_{dc}^{(1)} = A_1 \sin\varphi_0 + A_2 \sin 2\varphi_0 + \frac{d\varphi_1}{du}$$

$$(2): \qquad A_{dc}^{(2)} = \varphi_1 * A_1 \cos\varphi_0 + 2\varphi_1 * A_2 \cos 2\varphi_0 + \frac{d\varphi_2}{du}$$

Аналогично предыдущему пункту
$\varphi_0 = A_{dc}^{(0)} u + A_{ac}\sin u + \Delta\varphi$

$$\frac{d\varphi_1}{du} = A_{dc}^{(1)} - A_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(A_{ac}) \sin\left((A_{dc}^{(0)} + k)u + \Delta\varphi\right) - A_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(2A_{ac}) \sin\left((2A_{dc}^{(0)} + k)u + 2\Delta\varphi\right)$$

$A_{dc}^{(1)} = 0$. Амплитуда целых ступенек $max|A_1 J_n(A_{ac})\sin\Delta\varphi + A_2 J_{2n}(2A_{ac})\sin 2\Delta\varphi|$

Если $A_{dc}^{(0)} = n - 1/2$, то амплитуда соответствующей ступеньки $A_2 J_{2n-1}(2A_{ac})$

Если $2A_{dc}^{(0)} \notin \mathbb{Z}$, то находим φ_1 в явном виде:

$$\varphi_1 = A_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(A_{ac}) \frac{\cos\left((A_{dc}^{(0)} + k)u + \Delta\varphi\right)}{A_{dc}^{(0)} + k} + A_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(2A_{ac}) \frac{\cos\left((2A_{dc}^{(0)} + k)u + 2\Delta\varphi\right)}{2A_{dc}^{(0)} + k}$$

Подставляем φ_1, находим $\dfrac{d\varphi_2}{du}$ (более подробные вычисления в приложении).
Если $3A_{dc}^{(0)} = n \in \mathbb{Z}$, то после усреднения

$$\overline{\frac{d\varphi_2}{du}} = -3A_1 A_2 \frac{\cos 3\Delta\varphi}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{J_k(A_{ac}) J_{-n-k}(2A_{ac})}{2n + 3k}$$

Это 3ья дробная ступенька.

Важно понимать, что условие $3A_{dc}^{(0)} = n$ не отменяет того факта, что $A_{dc}^{(0)}$ не может целым или полуцелым числом, то есть n имеет вид $3k+1$ или $3k+2$, $k \in \mathbb{Z}$. Далее в условии $m * A_{dc}^{(0)} = n$ будут подразумеваться только такие n, при которых $A_{dc}^{(0)}$ будет удовлетворять наложенным ранее ограничениям.

Для следующего порядка малости уравнение выглядит так:

$$(3): \qquad A_{dc}^{(3)} = A_1 \left(\varphi_2 \cos\varphi_0 - \frac{\varphi_1^2}{2}\sin\varphi_0\right) + 2A_2(\varphi_2 \cos 2\varphi_0 - \varphi_1^2 \sin 2\varphi_0) + \frac{d\varphi_3}{du}$$

Опуская вычисления, приведу сразу ответ:

$$\frac{d\varphi_3}{du} = \sum_{i=1}^{6} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{m,l,k}^{(i)} \sin\left((iA_{dc}^{(0)} + 2k + 2l + m)u + i\Delta\varphi\right)$$

Выражение для $C_{m,l,k}^{(i)}$ при $i = 1{,}2{,}3$ приводить не буду, так как из-за условия

$iA_{dc}^{(0)} \notin \mathbb{Z}$

$\overline{\sin\left((iA_{dc}^{(0)} + 2k + 2l + m)u + i\Delta\varphi\right) = 0}$

$$C_{m,l,k}^{(4)} = A_1^2 A_2 \frac{J_k(A_{ac})J_{k+l}(2A_{ac})J_{l+m}(A_{ac})(8A_{dc}^{(0)} + 5k + 3l)}{4(2A_{dc}^{(0)} + k + l)(A_{dc}^{(0)} + k)(3A_{dc}^{(0)} + 2k + l)} +$$

$$+ \frac{A_1^2 A_2 J_k(A_{ac})J_{k+l}(A_{ac})J_{l+m}(2A_{ac})(3A_{dc}^{(0)} + 3k + 2l)}{2(A_{dc}^{(0)} + k + l)(2A_{dc}^{(0)} + 2k + l)(A_{dc}^{(0)} + k)}$$

Если $4A_{dc}^{(0)} = n \in \mathbb{Z}$, то амплитуда 4 ступеньки равна

$$L_4 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{-n-2k-2l,l,k}^{(4)}$$

По сути, при условии $4A_{dc}^{(0)} = n$ из всех слагаемых $\dfrac{d\varphi_3}{du}$ остались только те, для которых $i = 4$ и $m = -n - 2k - 2l$

$$C_{m,l,k}^{(5)} = A_1 A_2^2 \frac{J_k(2A_{ac})J_{k+l}(2A_{ac})J_{l+m}(A_{ac})(12A_{dc}^{(0)} + 6k + 5l)}{8(2A_{dc}^{(0)} + k + l)(2A_{dc}^{(0)} + k)(4A_{dc}^{(0)} + 2k + l)} +$$

$$+ \frac{A_1 A_2^2 J_k(A_{ac})J_{k+l}(2A_{ac})J_{l+m}(2A_{ac})(8A_{dc}^{(0)} + 5k + 3l)}{(2A_{dc}^{(0)} + k + l)(A_{dc}^{(0)} + k)(3A_{dc}^{(0)} + 2k + l)}$$

Если $5A_{dc}^{(0)} = n$, то амплитуда 5 ступеньки равна

$$L_5 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{-n-2k-2l,l,k}^{(5)}$$

$$C_{m,l,k}^{(6)} = A_2^3 \frac{J_k(2A_{ac})J_{k+l}(2A_{ac})J_{l+m}(2A_{ac})}{2(2A_{dc}^{(0)} + k)} \left(\frac{1}{2A_{dc}^{(0)} + k + l} + \frac{2}{4A_{dc}^{(0)} + 2k + l} \right)$$

Если $6A_{dc}^{(0)} = n$, то амплитуда 6 ступеньки равна

$$L_6 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{-n-2k-2l,l,k}^{(6)} = 0$$

Последнее равенство доказывает, что если ток-фазовое соотношение состоит только из одной гармоники, то в случае $3A_{dc}^{(0)} = n$ ступенек нет.

5 Итоги работы и дальнейшие планы

1.Подтверждено, что в случае фиксированного тока для ток-фазового соотношения, включающего в себя 2 гармоники, будут наблюдаться не только целые и полуцелые ступеньки, но и ступеньки высших порядков.

2.Найдены аналитические выражения для амплитуды 3$^{\text{ей}}$, 4$^{\text{ой}}$ и 5$^{\text{ой}}$ ступенек в пределе $\dfrac{A_1}{A_{dc}^{(0)}} = \dfrac{I_1}{I_{dc}} << 1$, $\dfrac{A_2}{A_{dc}^{(0)}} = \dfrac{I_2}{I_{dc}} << 1$

(под I_2 подразумевается амплитуда 2$^{\text{ой}}$ гармоники)

В соотношениях $L_3 \sim A_1 A_2$, $L_4 \sim A_1^2 A_2$ и $L_5 \sim A_1 A_2^2$ есть интересная особенность: L_3 появилась за счет перемножения 2 гармоник, L_4 - за счет перемножения двух 1$^{\text{ых}}$ и одной 2$^{\text{ой}}$ гармоники, L_5 - за счет одной 1$^{\text{ой}}$ и двух 2$^{\text{ых}}$ гармоник. При этом существенно, что L_4 возникла не из произведения только 2$^{\text{ых}}$ гармоник (как и L_6), а за счет смешения гармоник. Это позволяет предсказать, какой по порядку величины будет амплитуда $n^{\text{ой}}$ ступеньки.

В литературе известны еще пределы[2] $\dfrac{\omega}{\omega_0} >> 1$ и

$\dfrac{A_2}{A_1}$, $\dfrac{I_{ac}}{I_1} << 1$

Мой дальнейший план состоит в том, чтобы исследовать эти пределы численно и аналитически на наличие ступенек Шапиро высших порядков в случае, когда ток-фазовое соотношение состоит из 2 гармоник.

6 Приложение

Для 4 раздела для нахождения $\dfrac{d\varphi_2}{du}$ и $\dfrac{d\varphi_3}{du}$

Приводить полную формулу для $\dfrac{d\varphi_2}{du}$ я не буду ввиду ее громоздкости. Будем работать с ней по частям. Так, в выражении возникнут произведения

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(A_{ac})\frac{\cos\left((A_{dc}^{(0)}+k)u+\Delta\varphi\right)}{A_{dc}^{(0)}+k}\right)*\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(A_{ac})\cos\left((A_{dc}^{(0)}+k)u+\Delta\varphi\right)\right)$$

и

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(2A_{ac})\frac{\cos\left((2A_{dc}^{(0)}+k)u+2\Delta\varphi\right)}{2A_{dc}^{(0)}+k}\right)*\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(2A_{ac})\cos\left((2A_{dc}^{(0)}+k)u+2\Delta\varphi\right)\right)$$

Первое из них мы уже видели в предыдущем разделе. Там же было показано, что при усреднении это константа ~ 1. Второе произведение совпадает с первым с точностью до удвоения констант $A_{dc}^{(0)}$,A_{ac} и $\Delta\varphi$. Правильным выбором $A_{dc}^{(2)}$ можно получить $\overline{\dfrac{d\varphi_2}{du}} = 0$

Теперь самое интересное. Рассмотрим оставшиеся 2 произведения:

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(2A_{ac})\frac{\cos\left((2A_{dc}^{(0)}+k)u+2\Delta\varphi\right)}{2A_{dc}^{(0)}+k}\right)*\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(A_{ac})\cos\left((A_{dc}^{(0)}+k)u+\Delta\varphi\right)\right)=$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{J_k(A_{ac})J_{k+l}(2A_{ac})}{2(2A_{dc}^{(0)}+k+l)} (\cos((3A_{dc}^{(0)}+2k+l)u+3\Delta\varphi)+\cos((A_{dc}^{(0)}+l)u+\Delta\varphi))$$

и еще

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(A_{ac}) \frac{\cos((A_{dc}^{(0)}+k)u+\Delta\varphi)}{A_{dc}^{(0)}+k}\right) * \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(2A_{ac}) \cos((2A_{dc}^{(0)}+k)u+2\Delta\varphi)\right) =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{J_k(A_{ac})J_{k+l}(2A_{ac})}{2(A_{dc}^{(0)}+k)} (\cos((3A_{dc}^{(0)}+2k+l)u+3\Delta\varphi)+\cos((A_{dc}^{(0)}+l)u+\Delta\varphi))$$

Если $3A_{dc}^{(0)} \notin \mathbb{Z}$, то

$$\varphi_2 = -\frac{A_1A_2}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{J_k(A_{ac})J_{k+l}(2A_{ac})(5A_{dc}^{(0)}+3k+2l)}{(2A_{dc}^{(0)}+k+l)(A_{dc}^{(0)}+k)} * \frac{\sin((3A_{dc}^{(0)}+2k+l)u+3\Delta\varphi)}{3A_{dc}^{(0)}+2k+l} -$$

$$-\frac{A_1A_2}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{J_k(A_{ac})J_{k+l}(2A_{ac})(5A_{dc}^{(0)}+3k+2l)}{(2A_{dc}^{(0)}+k+l)(A_{dc}^{(0)}+k)} * \frac{\sin((A_{dc}^{(0)}+l)u+\Delta\varphi)}{A_{dc}^{(0)}+l}$$

Дальше по идее должны идти длинные вычисления и работа с рядами, но надо ли - большой вопрос. Если в общих чертах, то я представил каждый из используемых рядов как $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \sin((nA_{dc}^{(0)}+k)u+n\Delta\varphi)$ и потом не рассматривал их, если $n = 1, 2$ или 3, потому что в этом случае при усреднении они дают 0

[1] J.R.Waldram and P.W.Wu, *An Alternative Analysis of the Nonlinear Equations of the Current-Driven Josephson Junction* (Journal of Low Temperature Physics, Vol.47, Nos 3/4, 1982)

[2] K.K.Likharev, *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits* (Gordon and Breach, New York, 1986).