Институт теоретической физики имени Л. Д. Ландау РАН

Особенности тока через джозефсоновский контакт в переменном внешнем поле

Докладчик: Царев П. Н.
Научный руководитель: Фоминов Я. В.

Черноголовка, 2023

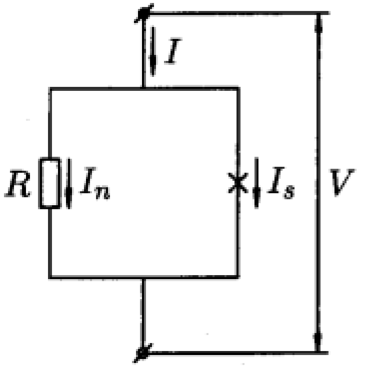
Эффект Джозефсона

Стационарный эффект Джозефсона: ток течет через слабый контакт бездиссипативно

$I_s = I(\varphi)$, а в простейшем случае $I_s = I_1 \sin\varphi$

Нестационарный эффект Джозефсона: напряжение, периодически зависящее от времени.

$$\omega_0 = \frac{2eI_1R}{\hbar}$$

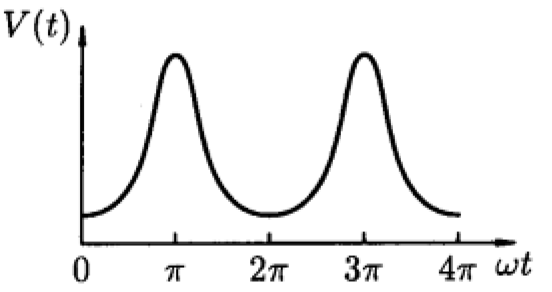


Безразмерные параметры:

$$\tau = \omega_0 t \qquad j = I/I_1 \qquad v = \frac{V}{I_1R}$$

Уравнения резистивной модели:

$$v = \frac{d\varphi}{d\tau} \qquad\qquad \frac{d\varphi}{d\tau} + \sin\varphi = j$$



Уравнения можно решить при заданном токе $j > 1$:

$$\varphi(\tau) = 2\arctan\left[\frac{1 + \nu\tan(\nu\tau/2)}{\sqrt{\nu^2+1}}\right] + 2\pi n$$

$$v(\tau) = \frac{j^2 - 1}{j + \cos(\nu\tau - \alpha)}$$

Здесь использованы $\nu = \sqrt{j^2 - 1}$, $\quad \cos\alpha = 1/j$, $\quad \sin\alpha = \pm\sqrt{j^2-1}$

Внешнее излучение. Случай фиксированного напряжения

Пусть есть внешний периодический сигнал:

$v(\tau) = v_{dc} + v_{ac}\cos(\Omega\tau)$, где $\quad \overline{v} = v_{dc} = \dfrac{V_{dc}}{I_1 R}, \quad v_{ac} = \dfrac{V_{ac}}{I_1 R}$

$$\varphi(\tau) = \varphi_0 + v_{dc}\tau + \frac{v_{ac}}{\Omega}\sin(\Omega\tau)$$

$$j(\varphi) = \sin\varphi + A\sin 2\varphi$$

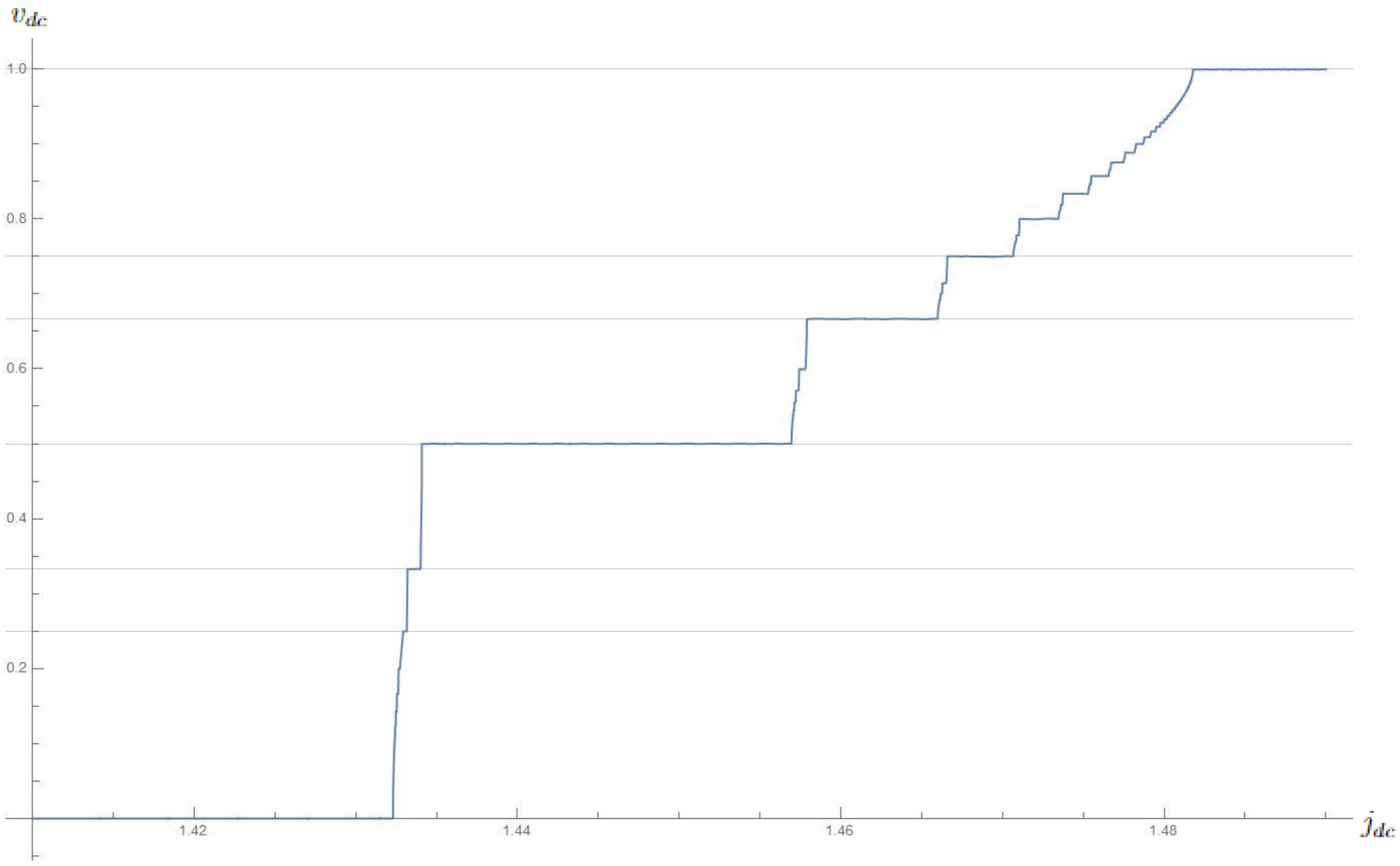
Тогда

$$j(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{v_{ac}}{\Omega}\right)\sin\left((v_{dc} + k\Omega)\tau + \varphi_0\right) + A\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{2v_{ac}}{\Omega}\right)\sin\left((2v_{dc} + k\Omega)\tau + 2\varphi_0\right)$$

Если $2v_{dc} = -2n - 1, n \in \mathbb{Z}$, то $\quad \overline{j} = A J_{2n+1}\left(\dfrac{2v_{ac}}{\Omega}\right)\sin 2\varphi_0$

Есть целые ($v_{dc} = n\Omega \in \mathbb{Z}$) и полуцелые ($v_{dc} = (n + 1/2)\Omega$) ступеньки, более дробных нет.

Постановка задачи



Задача: аналитически подтвердить существование дробных ступенек высших порядков в случае источника постоянного тока для 2 гармоник.

Внешнее излучение. Случай фиксированного тока

$I_{dc} + I_{ac}\cos\Omega\tau = I_1\sin\varphi + \frac{V}{R}$

$$j_{dc} + j_{ac}\cos\Omega\tau = \sin\varphi + \frac{d\varphi}{d\tau}$$

Переобозначим время $u = \omega t$ вместо $\tau = \omega_0 t$

$$\frac{\omega_0}{\omega} j_{dc} + \frac{\omega_0}{\omega} j_{ac}\cos u = \frac{\omega_0}{\omega}\sin\varphi + \frac{d\varphi}{du}$$

Обозначим $A_{dc} = \dfrac{\omega_0}{\omega} j_{dc}$, $A_{ac} = \dfrac{\omega_0}{\omega} j_{ac}$ и $A_1 = \dfrac{\omega_0}{\omega}$

$$A_{dc} + A_{ac}\cos u = A_1\sin\varphi + \frac{d\varphi}{du}$$

Пусть A_1 достаточно маленькое (по сравнению с чем именно будет установлено позже)

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \qquad A_{dc} = A_{dc}^{(0)} + A_{dc}^{(1)} + A_{dc}^{(2)} + \ldots \qquad \overline{\frac{d\varphi_1}{du}} = 0, \quad \overline{\frac{d\varphi_2}{du}} = 0\ldots$$

$$(0): \qquad A_{dc}^{(0)} + A_{ac}\cos u = \frac{d\varphi_0}{du} \qquad => \varphi_0 = A_{dc}^{(0)} u + A_{ac}\sin u + \Delta\varphi$$

$$(1): \qquad A_{dc}^{(1)} = A_1\sin\varphi_0 + \frac{d\varphi_1}{du}$$

$$(2): \qquad A_{dc}^{(2)} = \varphi_1 * A_1\cos\varphi_0 + \frac{d\varphi_2}{du}$$

Решение в случае одной гармоники

$$v_1 \propto \frac{d\varphi_1}{du} = A_{dc}^{(1)} - A_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(A_{ac}) \sin\left((A_{dc}^{(0)} + k)u + \Delta\varphi\right)$$

Если $A_{dc}^{(0)} \notin \mathbb{Z}$, то $\overline{\dfrac{d\varphi_1}{du}} = A_{dc}^{(1)}, \;\; => \;\; A_{dc}^{(1)} = 0$

Если $A_{dc}^{(0)} = n \in \mathbb{Z}$, то $\overline{\dfrac{d\varphi_1}{du}} = -A_1 J_n(A_{ac}) \sin \Delta\varphi$

Значит, амплитуда (полувысота) $n^{\text{ой}}$ ступеньки равна $A_1 J_n(A_{ac})$

φ_1 в явном виде: $\varphi_1 = A_1 \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(A_{ac}) \frac{\cos\left((A_{dc}^{(0)} + k)u + \Delta\varphi\right)}{A_{dc}^{(0)} + k}$, если $A_{dc}^{(0)} \notin \mathbb{Z}$

Чтобы φ_1 было мало, нужно потребовать $\dfrac{A_1}{A_{dc}^{(0)}} = \dfrac{I_1}{I_{dc}} << 1$

Решение в случае одной гармоники

$$\frac{d\varphi_2}{du} = A_{dc}^{(2)} - \frac{1}{2}A_1^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(A_{ac})J_{k+l}(A_{ac}) \frac{\cos\left((2A_{dc}^{(0)} + 2k + l)u + 2\Delta\varphi\right) + \cos(lu)}{A_{dc}^{(0)} + k + l}$$

Если $2A_{dc}^{(0)} \notin \mathbb{Z}$, то $\overline{\frac{d\varphi_2}{du}} = A_{dc}^{(2)} - (A_1)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(A_{ac}) \frac{1/2}{A_{dc}^{(0)} + k} = 0$

Если $2A_{dc}^{(0)} =$ нечетное n, то $\overline{\frac{d\varphi_2}{du}} = (A_1)^2 \cos 2\Delta\varphi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{J_k(A_{ac})J_{-n-k}(A_{ac})}{n+2k} = 0$

Это означает, что полуцелых ступенек нет.

Решение в случае 2 гармоник

$$A_{dc} + A_{ac}\cos u = A_1 \sin\varphi + A_2 \sin 2\varphi + \frac{d\varphi}{du}$$

Теория возмущений по $A_1 << A_{dc}^{(0)}$ и $A_2 << A_{dc}^{(0)}$

(0): $\quad A_{dc}^{(0)} + A_{ac}\cos u = \frac{d\varphi_0}{du}$

(1): $\quad A_{dc}^{(1)} = A_1 \sin\varphi_0 + A_2 \sin 2\varphi_0 + \frac{d\varphi_1}{du}$

(2): $\quad A_{dc}^{(2)} = \varphi_1 * A_1 \cos\varphi_0 + 2\varphi_1 * A_2 \cos 2\varphi_0 + \frac{d\varphi_2}{du}$

Аналогично предыдущему пункту

$$\varphi_0 = A_{dc}^{(0)} u + A_{ac}\sin u + \Delta\varphi$$

$$\frac{d\varphi_1}{du} = A_{dc}^{(1)} - A_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(A_{ac}) \sin\left((A_{dc}^{(0)} + k)u + \Delta\varphi\right) - A_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(2A_{ac}) \sin\left((2A_{dc}^{(0)} + k)u + 2\Delta\varphi\right)$$

$A_{dc}^{(1)} = 0$. Амплитуда целых ступенек $max|A_1 J_n(A_{ac}) \sin\Delta\varphi + A_2 J_{2n}(2A_{ac}) \sin 2\Delta\varphi|$

Если $A_{dc}^{(0)} = n - 1/2$, то амплитуда соответствующей ступеньки $A_2 J_{2n-1}(2A_{ac})$

Если $2A_{dc}^{(0)} \notin \mathbb{Z}$, то

$$\varphi_1 = A_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(A_{ac}) \frac{\cos\left((A_{dc}^{(0)} + k)u + \Delta\varphi\right)}{A_{dc}^{(0)} + k} + A_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(2A_{ac}) \frac{\cos\left((2A_{dc}^{(0)} + k)u + 2\Delta\varphi\right)}{2A_{dc}^{(0)} + k}$$

Решение в случае 2 гармоник

Если $3A_{dc}^{(0)} = n \in \mathbb{Z}$, то после усреднения

$$\overline{\frac{d\varphi_2}{du}} = -3A_1A_2\frac{\cos 3\Delta\varphi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{J_k(A_{ac})J_{-n-k}(2A_{ac})}{2n+3k}$$

Это $3^{ья}$ дробная ступенька

$$\frac{d\varphi_3}{du} = \sum_{i=4,5,6} C^{(i)}\sin\left((iA_{dc}^{(0)} + 2k + 2l + m)u + i\Delta\right)$$

$$C^{(4)} = A_1^2A_2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\frac{J_k(A_{ac})J_{k+l}(2A_{ac})J_{l+m}(A_{ac})(5A_{dc}^{(0)}+3k+2l)}{4(2A_{dc}^{(0)}+k+l)(A_{dc}^{(0)}+k)(3A_{dc}^{(0)}+2k+l)}+$$

$$+\frac{J_k(A_{ac})J_{k+l}(2A_{ac})J_{l+m}(A_{ac})}{4(2A_{dc}^{(0)}+k+l)(A_{dc}^{(0)}+k)}+\frac{J_k(A_{ac})J_{k+l}(A_{ac})J_{l+m}(2A_{ac})}{2(A_{dc}^{(0)}+k+l)(A_{dc}^{(0)}+k)}\Big)$$

Если $4A_{dc}^{(0)} = n \in \mathbb{Z}$, то сумма по $m = -n-2k-2l$ даст амплитуду 4 ступеньки

$$C^{(5)} = A_1A_2^2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\frac{J_k(A_{ac})J_{k+l}(2A_{ac})J_{l+m}(2A_{ac})(5A_{dc}^{(0)}+3k+2l)}{2(2A_{dc}^{(0)}+k+l)(A_{dc}^{(0)}+k)(3A_{dc}^{(0)}+2k+l)}+$$

$$+\frac{J_k(2A_{ac})J_{k+l}(2A_{ac})J_{l+m}(A_{ac})}{8(2A_{dc}^{(0)}+k+l)(2A_{dc}^{(0)}+k)}+\frac{J_k(A_{ac})J_{k+l}(2A_{ac})J_{l+m}(2A_{ac})}{(2A_{dc}^{(0)}+k+l)(A_{dc}^{(0)}+k)}\Big)$$

Если $5A_{dc}^{(0)} = n \in \mathbb{Z}$, то сумма по $m = -n-2k-2l$ даст амплитуду 5 ступеньки

$$C^{(6)} = A_2^3\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{J_k(2A_{ac})J_{k+l}(2A_{ac})J_{l+m}(2A_{ac})}{2(2A_{dc}^{(0)}+k+l)(2A_{dc}^{(0)}+k)}$$

Если $6A_{dc}^{(0)} \in \mathbb{Z}$, то сумма по $m = -n-2k-2l$ даст 0.

Дальнейшие планы

Предел $\frac{A_1}{A_{dc}^{(0)}} = \frac{I_1}{I_{dc}} << 1$ рассмотрен. Результат состоит в том, что в режиме заданного тока при рассмотрении токо-фазового соотношения с 2 гармониками в этом пределе были получены дробные ступеньки высших порядков.

Известны ещё пределы

$$\frac{\omega}{\omega_0} >> 1$$

$$\frac{A_2}{A_1}, \ \frac{I_{ac}}{I_1} << 1$$

Будущие задачи:

1. Рассмотреть другие пределы аналитически
2. Решить численно уравнения и в изученном пределе, и в новых

Спасибо за внимание

Анекдот

Подходит студент к матфизику и спрашивает, что такое нюанс. “О, сейчас покажу”, - говорит матфизик, сажает студента в аудиторию, сам идет к доске начинает выписывать формулы. Пишет какое-то пятистрочное действие на многообразии с дифференциальными формами, начинает его варьировать, потом еще какую-то жесть в сферических координатах добавляет, все переобозначает, внутри интеграл гантелькой берет с тучей конформных преобразований в подпространстве, бежит к компу, составляет таблицу Бутчера, переходит к Рунге-Кутте…уже часов 5 что-то делает, студент не выдерживает и спрашивает:”Так что же такое нюанс?”. И матфизик отвечает ему:”А, извини, забыл про тебя”.