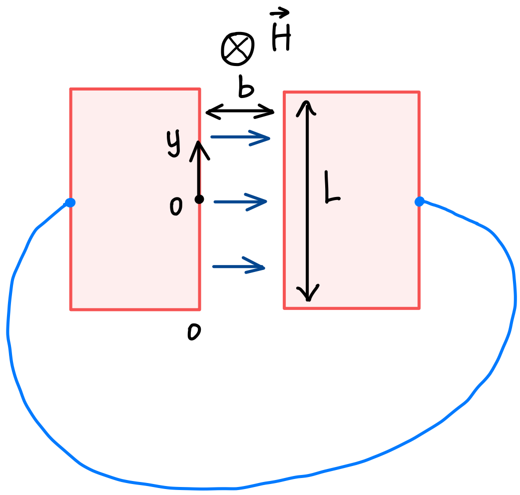
Научный отчёт

ДОП. ЗАДАЧА: определение распределения критической плотности тока в Джозефсоновском контакте по полному току, протекающему через него

В отсутствии магнитного поля наиболее простое и часто встречающееся токо-фазовое соотношение[1]: $J_s(\varphi) = J_c \sin\varphi$.



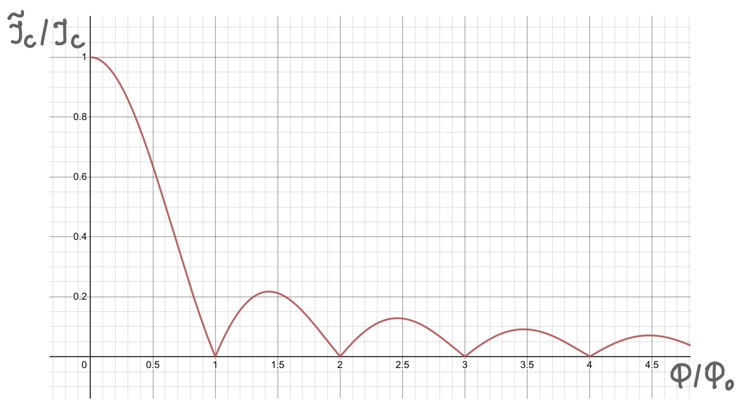
Если мы включим магнитное поле, то разность фаз станет зависеть от координаты на контакте $\varphi = \varphi(y)$. В случае однородного поля, т.к. $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta\Phi}{\Phi_0}$, зависимость будет линейной: $\varphi(y) = \varphi_0 + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\frac{y}{L}$,

$\Phi_0 = \frac{hc}{2e} = 2{,}07 \cdot 10^{-7}$ Гс·см^2 – квант магнитного потока.

Предполагая $j_c(x,y) = const$, найдём ток через контакт в присутствии магнитного поля:

$J(\varphi_0, \Phi) = J_c \operatorname{sinc}(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}) \sin(\varphi_0)$, где

φ_0 – разность фаз в середине.



Как видно, критический ток $\tilde{J}_c(\Phi) = J_c \left|\operatorname{sinc}(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0})\right|$.

Это преобразование Фурье для прямоугольной ступеньки, поэтому возникает вопрос: можно ли по профилю тока восстановить информацию про распределение критического тока $j_c(x,y)$ в контакте?

Пусть сначала мы можем подбирать φ_0 сами. Тогда общее выражение для тока через контакт: $J(\varphi_0, \Phi) = \int_{\mathbb{R}^2} j_c(x,y) \sin\varphi(x,y)\, dx\, dy$. Пусть магнитное поле однородно и направлено произвольно, т.е. $\varphi = \varphi_0 + k_x x + k_y y$, где $k_i = 2\pi \frac{\Phi_i}{\Phi_0}$. Заметим, что $J(\frac{\pi}{2}, \Phi) - iJ(0,\Phi) = \int_{\mathbb{R}^2} j_c(x,y)\, e^{-ik_x x - ik_y y} dx\, dy$.
Это преобразование Фурье $\Rightarrow$ с помощью обратного преобразования можно восстановить распределение $j_c(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} [J(\frac{\pi}{2}, \Phi) - iJ(0,\Phi)]\, e^{ik_x x + ik_y y} dk_x dk_y$.

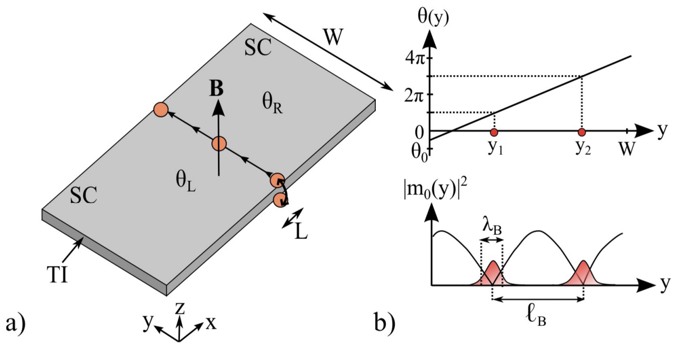
Если же известна только величина критического тока, то нужны некоторые предположения о профиле. Самое простое — профиль $J_c(y) = \int_{\mathbb{R}} j_c(x,y)\, dx$ чётный[2]. Тогда $\hat{J}_c(k) = \int_{\mathbb{R}} J_c(y)\, e^{-iky} dy = \int_{\mathbb{R}} J_c(y) \cos(ky)\, dy$ будет вещественной и в нулях измеряемой $I_c(\Phi) = |\hat{J}_c(k)|$ нужно будет просто выбирать знаки функции $\hat{J}_c(k)$ так, чтобы она была дифференцируема. По восстановленной $\hat{J}_c(k)$ найдём профиль контакта, как $J_c(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{J}_c(k) \cos(ky)\, dk$.

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА: Найти способ определения майорановского нулевого состояния (далее МНС) по критическому току через Джозефсоновский контакт

В этой работе мы подробно изучали соединение S-TI-S, где TI - топологический изолятор, материал, имеющий изоляционный объём и проводящую поверхность. В таком соединении андреевские связанные состояния имеют спектр энергий $\mathcal{E} = \pm\Delta_0 \cos\frac{\varphi}{2}$, где Δ_0 - параметр порядка сверхпроводника. Как видно, при $\varphi = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, в спектре присутствуют состояния с нулевой энергией, это и есть МНС.

Далее будем часто ссылаться на основную статью[3]. Гамильтониан системы:

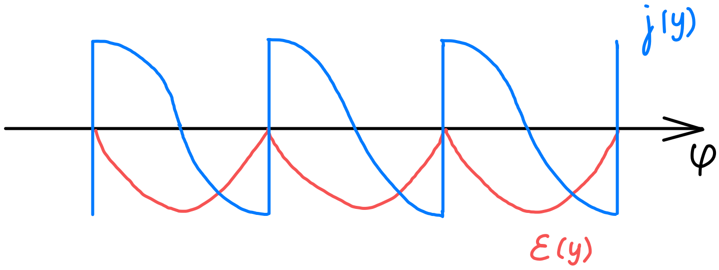
$$H = \int d^2r\, \psi^+(r)\left[V\hat{z}\cdot(\Pi \times S) - \mu(r)\right]\psi(r) +$$
$$+ \left[\Delta(r)\psi^+_\uparrow(r)\psi^+_\downarrow(r) + h.c.\right]$$



При рассмотрении слоя $y = const$ можно ввести эфф-ый гамильтониан $H_{eff} = iV_M(\gamma_L\partial_y\gamma_L - \gamma_R\partial_y\gamma_R) + iE(y)\gamma_L\gamma_R$, где γ_L, γ_R - майорановские операторы

Около нулей Гамильтониан можно линеаризовать: $\mathcal{H} = \alpha y\tau_z - iV\tau_x\partial_y$.
Можно решить ур-ие Шрёдингера $\mathcal{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, если заметить, что $\mathcal{H}^2 = \alpha^2y^2 - V^2\partial_y^2 - \alpha V\tau_y \sim \mathcal{H}_0 = \alpha^2y^2 - V^2\partial_y^2 + \alpha V\tau_z$, а это не что иное, как Гамильтониан гармонического осциллятора (со сдвигом по энергии).
Получим спектр $E_n = \pm\sqrt{2\alpha V n}$. В терминах основной статьи $\alpha = \frac{\pi\Delta}{\ell_B}$, где $\ell_B = L\frac{\Phi_0}{\Phi}$ - магнитная длина $\Rightarrow$ $E_n = \pm\sqrt{2\pi n V_M \Delta/\ell_B}$

Далеко от нулей спектр можно считать непрерывным. Сила тока $J \sim -\frac{\partial E}{\partial \varphi} \Rightarrow j(\varphi) = \pm j_c \sin\varphi/2$.



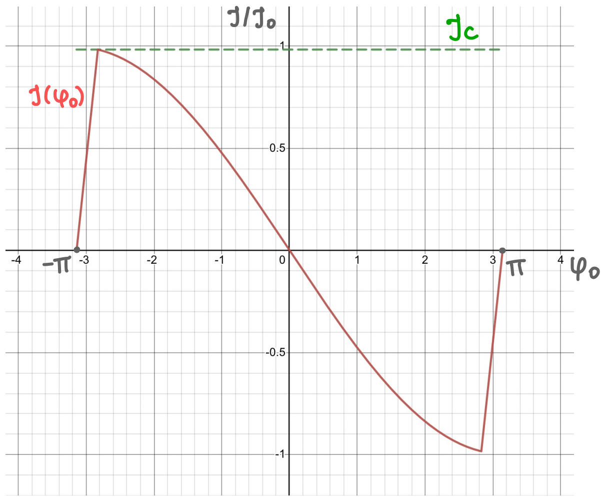
Полная сила тока определяется выражением $J(\varphi_0,\Phi) = -\frac{2\pi}{\Phi_0}\cdot\frac{\partial E}{\partial \varphi_0}$, где $E \sim -\int_{-L/2}^{L/2} |\cos(\varphi(y)/2)|dy$ – полная энергия связанных состояний.

$$J(\varphi_0,\Phi) \sim \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial}{\partial \varphi_0}|\cos(\varphi(y)/2)|dy \sim \frac{\Phi_0}{\Phi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d}{d\varphi}|\cos(\varphi/2)|d\varphi \Rightarrow$$

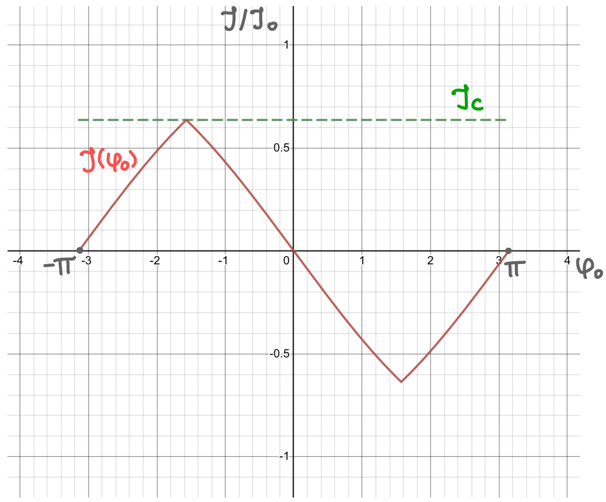
$J(\varphi_0,\Phi) = J_0\frac{\Phi_0}{\pi\Phi}\left(\left|\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\pi}{2}\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\right| - \left|\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}-\frac{\pi}{2}\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\right|\right)$. Ниже представлены графики этой зависимости для различных значений Φ.

Если оптимизировать выражение по φ_0, то $J_c(\Phi) = J_0\left|\mathrm{sinc}\left(\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\right|$.

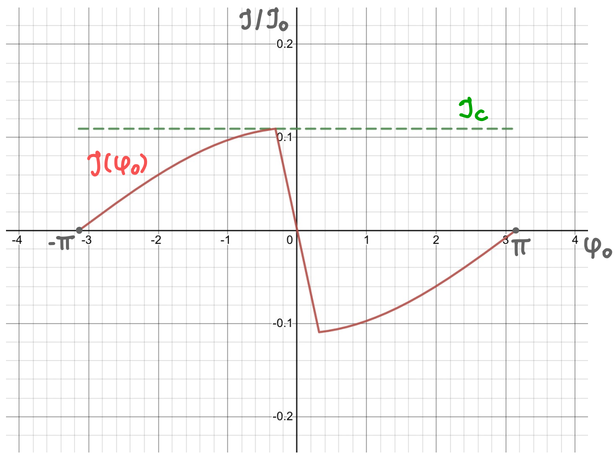
$\Phi = 0{,}1\Phi_0$



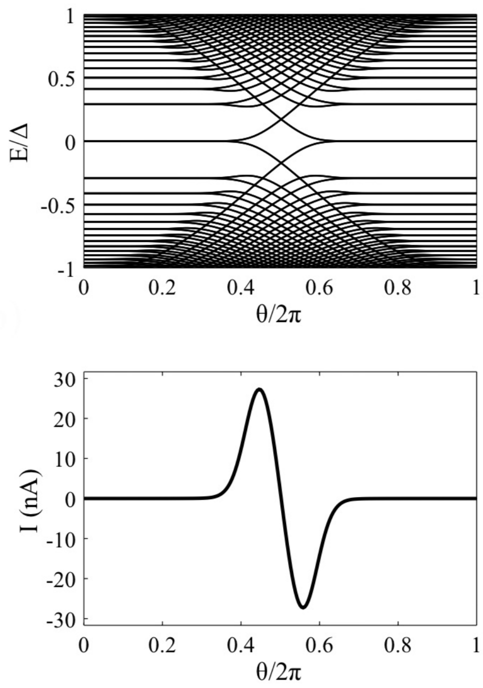
$\Phi = 0{,}5\Phi_0$



$\Phi = 0{,}9\Phi_0$

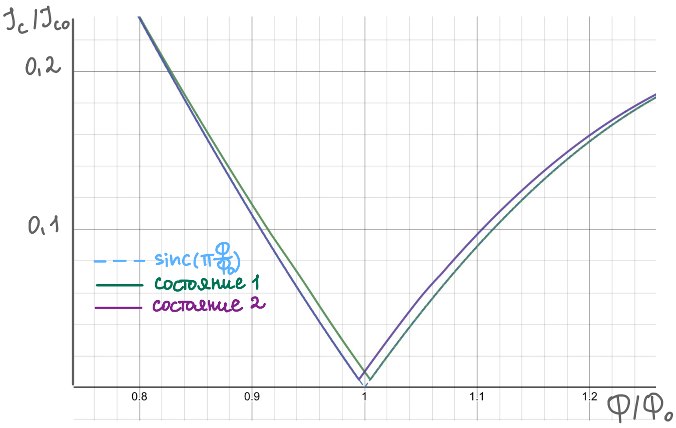


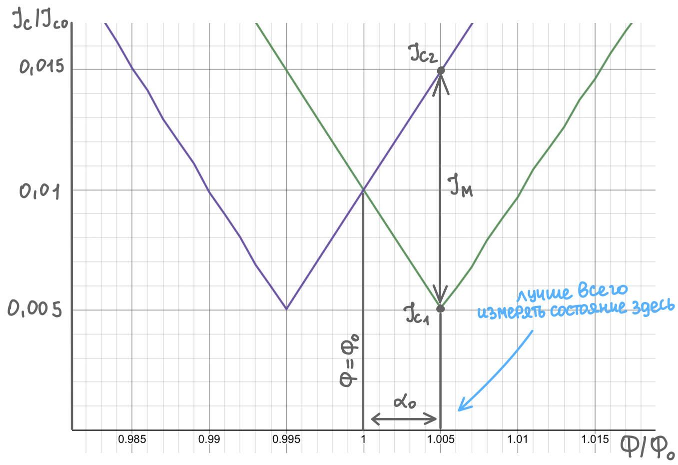
Но помимо этого нужно учитывать квантованность уровней около МНС. При изменении φ_0 они смещаются по сверхпроводнику.
При подходе к его границе майорановские состояния с верхней и нижней поверхностей начинают чувствовать друг друга, из-за чего энергетические уровни расщепляются. Этот процесс называется гибридизацией.



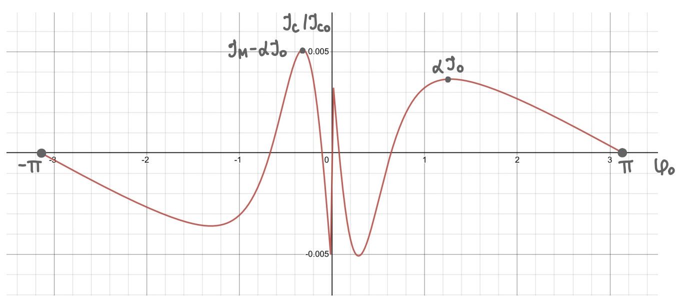
Уровни расщепляются на хар-ую величину $\delta E_M \approx \sqrt{\frac{v_M \Delta}{l_B}}$ (сравнимо с первым уровнем найденного ранее спектра). Учитывая, что процесс начинается при $\delta\theta_0 \approx \frac{\pi\lambda_B}{W}$, вклад майорановского тока $J_M \approx \frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\delta E_M}{\delta\theta_0} \approx \frac{\Delta}{\Phi_0}$.

Теперь, зная оба вклада в ток, можно нарисовать график критического тока от магнитного поля $J_c(\Phi)$.





Видно, что вдали от точки $\Phi=\Phi_0$ для обоих майорановских состояний $J_c(\Phi)$ выглядит, как $\mathrm{sinc}(\pi\frac{\Phi}{\Phi_0})$, но вблизи неё картины сильно отличаются: образуется „крест" при $\Phi=\Phi_0$ с $k=\pm1$.



Резкий переход в точках минимума вызван перескоком с одного максимума на другой: $I_M - \alpha I_0 = \alpha I_0 \Rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{2}\frac{I_M}{I_0}$

Максимальное отличие в критических токах разных состояний именно в точках $\frac{\Phi}{\Phi_0} = 1 \pm \frac{I_M}{2I_0}$: $I_{c1} = \frac{I_M}{2}$, $I_{c2} = \frac{3I_M}{2} \Rightarrow \Delta I_c = I_M$.

Теперь, когда мы поняли, что майорановские состояния можно отличить по разным величинам критического тока I_{c1} и I_{c2}, нужно узнать, при какой температуре и с какой точностью их можно измерить. Для этого обратимся к аналогии Джозефсоновского контакта с массивной частицей в характерном потенциале под названием „стиральная доска". Разность энергий в минимуме и максимуме:

$$\Delta E(I, I_c) = \frac{\Phi_0}{\pi}\sqrt{I_c^2 - I^2} - \frac{\Phi_0 I}{\pi}\arccos\left(\frac{I}{I_c}\right).$$

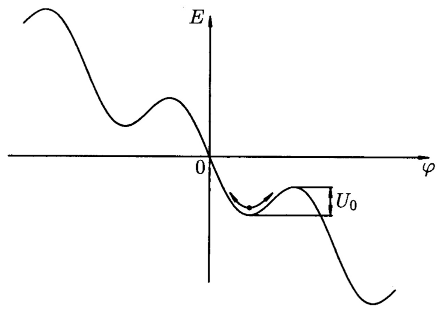
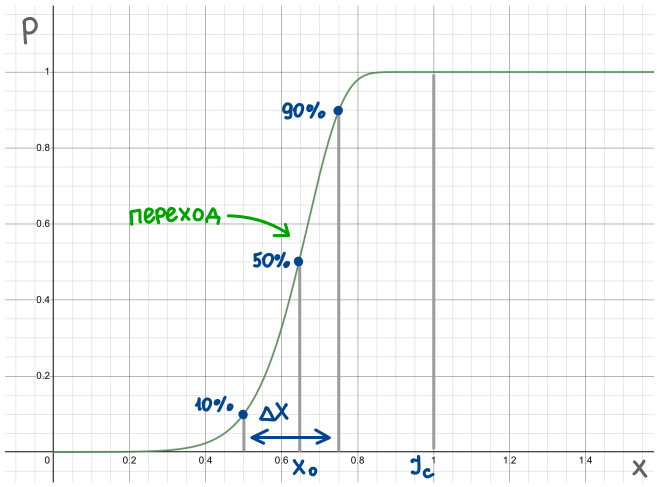


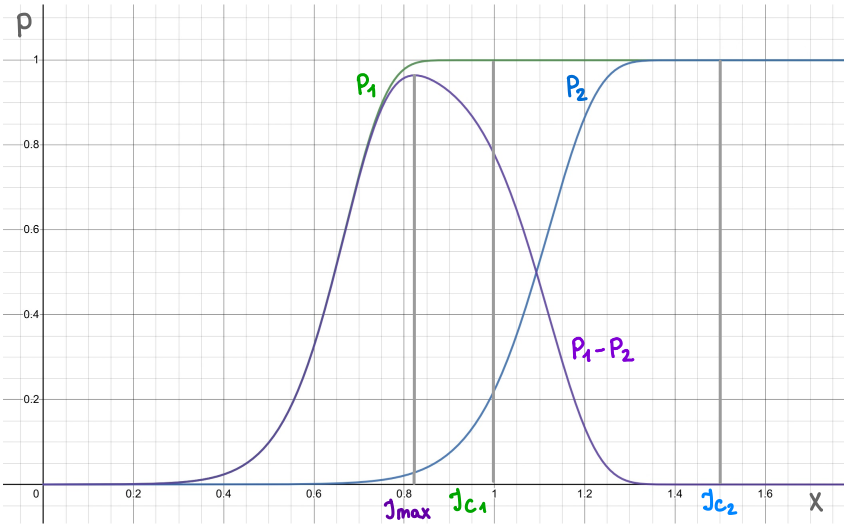
Рис. 22.4. Потенциальный рельеф $E(\varphi)$ джозефсоновского перехода с заданным током.

Пока минимум существует, частица осциллирует в нём с частотой $\omega_p = \sqrt{\frac{2\pi I_c}{C\Phi_0}}$, т.е. каждое $\tau_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \sqrt{\frac{2\pi C\Phi_0}{I_c}}$ она может выпрыгнуть из ямы с приблизительной вероятностью $p = \exp(-\frac{\Delta E}{k_B T})$. Если τ – время наблюдения, то вероятность выпрыгнуть за это время $P = 1 - \left[1 - \exp(-\frac{\Delta E}{k_B T})\right]^{\tau/\tau_p}$.

Обезразмерим коэффициенты, $P = 1 - \left[1 - \exp(-\frac{\Delta E}{T})\right]^t$. Также $\Delta E(I, I_c) = I_c \Delta E(\frac{I}{I_c}, 1)$, значит можно изучать только $\Delta E(x) = 2\sqrt{1-x^2} - 2x\arccos(x)$. Выразим $\Delta E(P) = -T\ln(1-(1-P)^{1/t}) = T\ln(-\frac{t}{\ln(1-P)}) + O(\frac{1}{t})$. При этом зависимость $x(\Delta E)$ приблизительно линейная $\Rightarrow$ Положение перехода линейно зависит от температуры T и логарифмически от времени наблюдения. А характерная ширина перехода $\Delta x \approx T$. Отсюда следует, что максимальная температура, при которой можно отличить два состояния $T_{max} \approx \Delta I_c$. Возвращаясь к размерным коэффициентам, $T_{max} \approx \frac{\Phi_0 \Delta I_c}{2\pi k_B}$.

Графики $\Delta E(X)$, $P(X)$ и $\Delta P(X)$ представлены ниже:





При этом, чтобы сам эффект произошёл, $T \ll \frac{\delta E_M}{k_B} = \frac{\Phi_0}{2\pi k_B} J_M \delta\theta_0 \sim T_{max}$, т.е. условия наблюдения не вносят дополнительных ограничений на температуру.

Для параметров из оригинальной статьи $T \ll 0{,}2\,K$.

ВЫВОДЫ:

- По полному току можно определить распределение $j_c(x,y)$ в Джозефсоновском контакте, если есть некоторые дополнительные предположения.
- По критическому току через S-TI-S соединение можно измерить МНС ($\Delta J_c \sim 10$ нА, $T \ll 0{,}2$ K – для данных из оригинальной статьи).

В БУДУЩЕМ:

планируем решить Гамильтониан численно и убедиться в том, что оценки, сделанные на научной школе, оказались верными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

[1] В.В.Шмидт, Введение в физику сверхпроводников, 2000 г.

[2] R.C. Dynes and T.A. Fulton, Supercurrent Density Distribution in Josephson Junctions, Physical Review B, Volume 3, Number 9, 1 May 1971

[3] Andrew C. Potter and Liang Fu, Anomalous Supercurrent from Majorana States in Topological Insulator Josephson Junctions, arXiv: 1303.1524v1, 6 Mar 2013