Спектр изгибных фононов в магнитном поле

И.Д. Петровский
под руководством И.С. Бурмистрова

17 – 29 августа 2023

Содержание

1 Постановка задачи

В твердых телах могут распространяться волны, в которых атомы испытывают в каждый момент времени определенные смещения. С точки зрения квантовой теории их можно рассматривать как распространение некоторых квазичастиц, называемых *фононами.* Отправной точкой для данной работы является вопрос о том, возможно ли взаимодействие фононов с магнитным полем и, если ответ на него положителен, то естественным образом возникает следующий вопрос – Каков механизм данного взаимодействия?

Отметим, что фононы не несут электрического заряда, поэтому, в нулевом приближении, мы можем предположить, что фононы с магнитным полем не взаимодействуют. Однако, возможны более сложные механизмы взаимодействия фононов с магнитным полем, нежели простое взаимодействие заряженной частицы. В конце прошлого века в статьях [1], [2] теоретически была обоснована возможность влияния магнитного поля на фононы в ионных кристаллах. В частности, было предсказано изменение спектра и поляризации оптических фононов в присутствии магнитного поля. Позднее данные, а также иные эффекты, указывающие на взаимодействие фононов и магнитного поля наблюдались экспериментально, например в работе [3].

Основной идеей для учета взаимодействия фононов (в ионных кристаллах) с магнитным полем является добавление к функции Лагранжа L кристаллической решетки члена, описывающего взаимодействие ионов с магнитным полем:

$$\delta L = \sum_k \sum_\alpha Q_\alpha \mathbf{v}(\mathbf{r}_{k\alpha}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_{k\alpha})$$

Здесь суммирование идет по двуми индексам k, α, нумерующим элементарные ячейки решетки и её элементы соответственно. Мы далее рассматриваем однородное постоянное магнитное поле $\mathbf{B}$, и в таком случае в симметричной калибровке векторный потенциал можем записать как

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{B} \times \mathbf{r}\right]$$

Также введем вектор смещения $\mathbf{u}_{k\alpha}$ атома под номером $k\alpha$ так, что

$$\mathbf{r}_{k\alpha} = \mathbf{r}^{(0)}_{k\alpha} + \mathbf{u}_{k\alpha}, \qquad \text{где} \quad \mathbf{r}^{(0)}_{k\alpha} \text{ – радиус-вектор положения равновесия.}$$

С учетом этого можем переписать

$$\delta L \sim \sum_k \sum_\alpha Q_\alpha \, \mathbf{B} \cdot \left[\mathbf{u}_{k\alpha} \times \dot{\mathbf{u}}_{k\alpha}\right] + \ldots \tag{1}$$

Далее покажем иной способ получения аналогичной "добавки" функции Лагранжа и исследуем её влияние на спектр фононов.

2 Спин фононов

Рассмотрим твердое тело с точки зрения теории упругости, то есть, как сплошную среду. Важнейшим вопросом является деформация твердого тела, и она характеризуется полем *вектором деформации* $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ есть радиус-вектор одной и той же точки твердого тела до и после деформации, соответственно. В случае изотропной среды данное поле описывается плотностью Лагранжа

$$\mathscr{L}[u] = \frac{\rho}{2}\dot{u}_i\dot{u}_i - \frac{\lambda}{2}(\partial_i u_i)^2 - \frac{\mu}{2}\left(\partial_i u_k \, \partial_i u_k + \partial_i u_k \, \partial_k u_i\right) \tag{2}$$

где ρ есть плотность среды, а λ, μ – коэффициенты Ламе.

В силу изотропности среды выражение (2) должно быть инвариантно относительно группы вращений $SO(3)$. Как следует из теоремы Нётер, такой симметрии соответствует первый интеграл – полный момент поля, складывающийся из *орбитального* и *собственного момента (спина)*. Плотность орбитального момента $\mathbf{l}$ и спина $\mathbf{s}$ можно получить явно, что было впервые сделано в статье [4]. Было получено

$$\mathbf{l} = \rho([\mathbf{x} \times \nabla]\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}}, \qquad \mathbf{s} = \rho[\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}] \tag{3}$$

С тем, как получить такие выражения можно ознакомиться в разделе аппендикса A.

С учетом выражения (3), мы можем рассмотреть полученную ранее "добавку" к функции Лагранжа (1), как взаимодействие магнитного поля и спина поля вектора деформации:

$$\delta\mathscr{L} \sim \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = \rho[\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}] \cdot \mathbf{B} \tag{4}$$

Таким образом, мы можем описать влияние магнитного поле на фононы в терминах взаимодействия магнитного поля со спином фононов.

3 Спектр фононов в присутствии магнитного поля

Мы хотим исследовать, как “добавка” (4) повлияет на спектр фононов. Изначально мы имеем плотность Лагранжа (2), которая после введения мнимого времени по формуле $t = i\tau$ принимает вид

$$\mathscr{L}[u] = -\frac{1}{2}(\rho\partial_\tau u_i\partial_\tau u_i + \lambda(\partial_i u_i)^2 + \mu\,(\partial_i u_k\,\partial_i u_k + \partial_i u_k\,\partial_k u_i)) \tag{5}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа тогда имеют вид

$$\rho\partial_{\tau\tau}u_i + (\lambda+\mu)\partial_i\partial_k u_k + \mu\partial_{kk}u_i = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \rho\partial_{\tau\tau}\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\text{grad div }\mathbf{u} + \mu\triangle\mathbf{u} = 0 \tag{6}$$

Для данных уравнений известны решения (смотри например [7], §22), в частности, известно, что существует два типа плоских волн решающих данное уравнение – *продольные волны*, вектор поляризации которых параллелен волновому вектору и *поперечные волны*, у которых вектор поляризации ортогонален волновому вектору. Распространяются они со скоростями

$$c_l = \sqrt{\frac{2\mu+\lambda}{\rho}}, \qquad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

соответственно.

Учитывая теперь взаимодействие магнитного поля и спина поля вектора деформации имеем новую плотность Лагранжа

$$\mathscr{L}[u] = -\frac{1}{2}(\rho\partial_\tau u_i\partial_\tau u_i + \lambda(\partial_i u_i)^2 + \mu\,(\partial_i u_k\,\partial_i u_k + \partial_i u_k\,\partial_k u_i) + i\gamma\rho\epsilon_{ijk}u_i\,\partial_\tau u_j B_k) \tag{7}$$

Здесь γ есть некоторый феноменологический коэффициент, оценки для которого мы приведем ниже.

Тогда новые уравнения Эйлера-Лагранжа примут вид

$$\rho\partial_{\tau\tau}u_i + (\lambda+\mu)\partial_i\partial_j u_j + \mu\partial_{jj}u_i - 2i\gamma\rho\epsilon_{ijk}\partial_\tau u_j B_k = 0 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \rho\partial_{\tau\tau}\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\text{ grad div }\mathbf{u} + \mu\triangle\mathbf{u} - 2i\gamma\rho[\partial_\tau\mathbf{u}\times\mathbf{B}] = 0 \tag{8}$$

Подставим сюда одну гармонику $u_i(x,\tau) = \widehat{u}_i\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega\tau}$. Получим

$$\left[(\rho\omega^2+\mu k^2)\delta_{ij} + (\lambda+\mu)k_ik_j + 2\gamma\rho\omega\epsilon_{ijk}B_k\right]\widehat{u}_j = 0 \tag{9}$$

Следуя общему правилу, спектр фононов найдем, разрешая относительно $\omega(\mathbf{k})$ характеристическое уравнение

$$\det\left[(\rho\omega^2+\mu k^2)\delta_{ij} + (\lambda+\mu)k_ik_j + 2\gamma\rho\omega\epsilon_{ijk}B_k\right] = 0 \tag{10}$$

В общем случае (10) есть кубическое уравнение относительно ω^2, однако в случае если волновой вектор $\mathbf{k}$ параллелен или ортогонален полю, оно распадается на линеный и квадратичный множитель, допуская простое аналитическое решение. Точные расчеты приведены в разделе аппендикса B, а здесь приведем поведение спектра при $k\to 0$. Тогда

$$\text{a) } \mathbf{B}\,||\,\mathbf{k}: \quad \omega_1^2 = c_l^2k^2, \qquad \omega_2^2 = 4\gamma^2B^2 + 2c_t^2k^2 + O(k^4), \qquad \omega_3^2 = \frac{c_t^4}{4\gamma^2B^2}k^4 + O(k^6)$$

$$\text{b) } \mathbf{B}\perp\mathbf{k}: \quad \omega_1^2 = \frac{c_l^2c_t^2}{4\gamma^2B^2}k^4 + O(k^6), \qquad \omega_2^2 = c_t^2k^2, \qquad \omega_3^2 = 4\gamma^2B^2 + (c_t^2+c_l^2)k^2 + O(k^4) \tag{11}$$

Отсюда видно, что изменяются ветви спектра волн, распространяющихся ортогонально вектору $\mathbf{B}$ – некоторые из них “поднимаются” на величину $4\gamma^2B^2$, а некоторые сменяют линейную зависимость от k на квадратичную. С использованием численных вычислений построили графики для различных случаев (смотри Рис. 1).

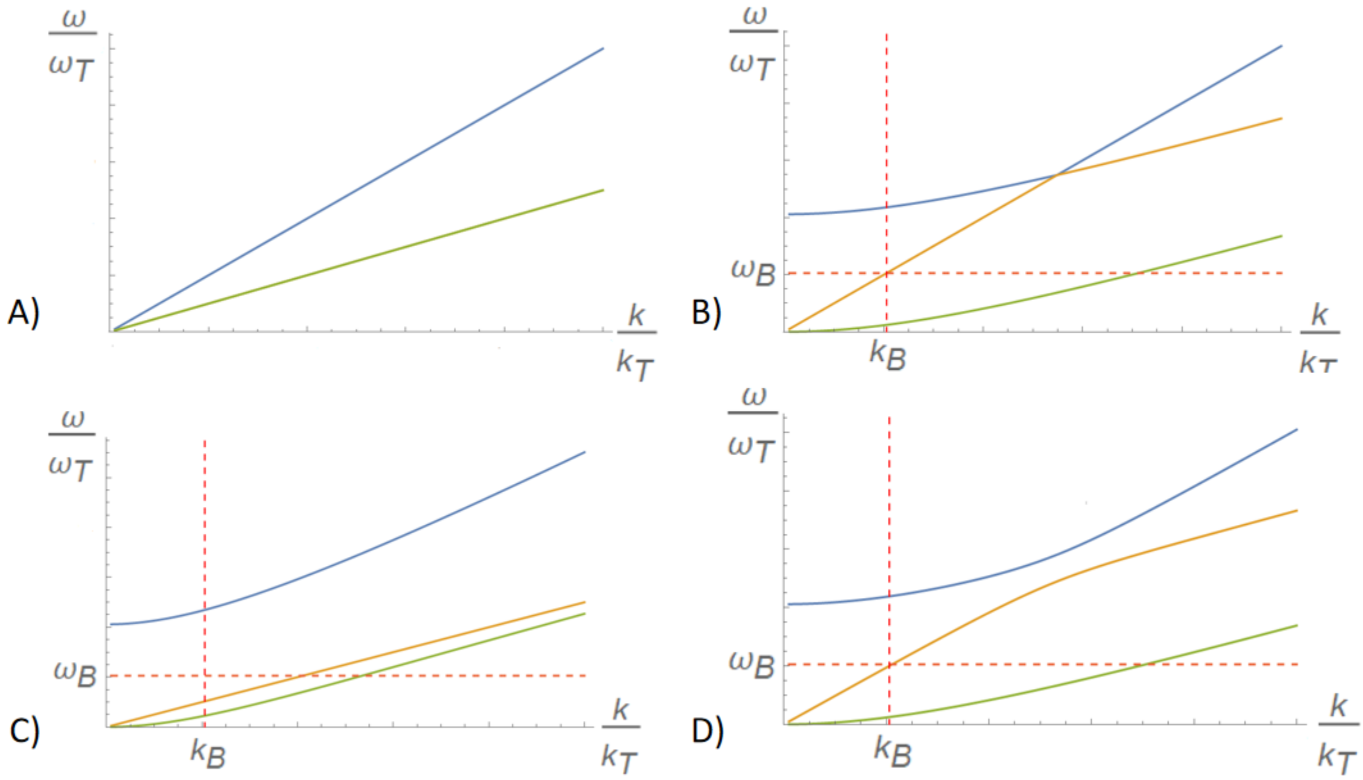

Рис. 1: Графики зависимости $\omega(k)$ для случаев A) Магнитное поле отсутствует, B) **B** параллельно **k**, C) **B** ортогонально **k**, D) **B** под некоторым углом к **k**. Здесь $\omega_B = \frac{k_B T}{\hbar}$, $\omega_B = \gamma B$, $c_l k_\# = \omega_\#$.

4 Спектр фононов в графене

Далее мы хотим исследовать влияние магнитного поля на спектр фононов в графене. Графен является двумерной мембраной и будем полагать, что при отсутствии деформаций мембрана лежит в плоскости Ox_1x_2. Соответственно, вектор смещения, обозначаемый теперь $r_i = (u_1, u_2, h)$ имеет компоненты u_1, u_2 описывающие деформации в плоскости мембраны и компоненту h, описывающую изгибные деформации мембраны.

Графен имеет шестиугольную кристаллическую решетку, поэтому при деформациях в своей плоскости ведет себя как двумерная изотропная среда (смотри [7], §10), а энергия изгибных колебаний, как известно, пропорциональна $(\triangle h)^2$. С учетом вышесказанного, мы будем рассматривать плотность Лагранжа

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left(\rho\partial_\tau r_i \partial_\tau r_i + \lambda(\partial_\alpha u_\alpha)^2 + \mu(\partial_\alpha u_\beta\, \partial_\alpha u_\beta + \partial_\alpha u_\beta\, \partial_\beta u_\alpha) + \varkappa(\partial_{\alpha\alpha} h)^2 + \gamma\rho\epsilon_{ijk} r_i \dot{r}_j B_k\right) \tag{12}$$

где $\alpha, \beta, \ldots = 1, 2$ и $i, j, k, \ldots = 1, 2, 3$, а $\varkappa$ есть изгибная жесткость.

Уравнения Эйлера-Лагранжа в таком случае есть

$$\rho\, \partial_{\tau\tau} u_\alpha - 2i\gamma\rho\epsilon_{\alpha jk}\, \partial_\tau r_j B_k + (\lambda + \mu)\partial_\alpha \partial_\beta u_\beta + \mu \partial_{\beta\beta} u_\alpha = 0 \tag{13}$$

$$\rho\, \partial_{\tau\tau} h - 2i\gamma\rho\epsilon_{3jk}\, \partial_\tau r_j B_k - \varkappa\, \partial_{\alpha\alpha}\partial_{\beta\beta} h = 0 = 0 \tag{14}$$

Отметим, что в отсутствии магнитного поля система (13) независима с уравнением (14). Первая система в таком случае описывает колебания двумерной изотропной среды, в которой как и раньше есть продольные и поперечные волны, а уравнение (14) описывающее изгибные колебания, в силу того, что содержит 4-ую производную будет уже иметь не линейный спектр, а квадратичный:

$$\omega_3^2 = \frac{\varkappa}{\rho} k^4 \tag{15}$$

В нашем случае все несколько сложнее. Подставим в систему (13 - 14) плоскую волну $u_i(x,\tau) = \widehat{u}_i\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega\tau}$ и получим уравнение вида

$$Q_{ij}\widehat{r}_j = 0$$

где матрица Q_{ij} имеет вид

$$Q_{ij} = (\omega^2 + k^2 c_t^2)\delta_{\alpha\beta} + (c_l^2 - c_t^2)k_\alpha k_\beta + \left(\omega^2 + \frac{\varkappa}{\rho}k^4\right)\delta_{3i}\delta_{3j} + 2\gamma\omega\epsilon_{ijk}B_k \tag{16}$$

И для нахождения спектра опять хотим разрешить уравнение $\det Q = 0$. Аналогично, рассмотрим случаи, когда есть понятное аналитическое решение (подробнее смотри раздел аппендикса B):

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \omega_1^2 = 4\gamma^2B^2 + (c_l^2 + c_t^2)k^2 + O(k^4), \qquad \omega_2^2 = \frac{c_l^2 c_t^2}{4\gamma^2 B^2}k^4 + O(k^6), \qquad \omega_3^2 = \frac{\varkappa}{\rho}k^4\\
&\text{b)} \quad \omega_1^2 = 4\gamma^2B^2 + c_l^2k^2 + O(k^4), \qquad \omega_2^2 = c_t^2k^2, \qquad \omega_3^2 = \frac{\varkappa c_l^2}{4\rho\gamma^2B^2}k^6 + O(k^8)\\
&\text{c)} \quad \omega_1^2 = c_l^2k^2, \qquad \omega_2^2 = 4\gamma^2B^2 + c_t^2k^2 + O(k^4), \qquad \omega_3^2 = \frac{\varkappa c_t^2}{4\rho\gamma^2B^2}k^6 + O(k^8)
\end{aligned} \tag{17}$$

где рассмотрели случаи a) магнитное поле нормально к плоскости мембраны, b) поле в плоскости мембраны, параллельно k, c) поле в плоскости мембраны, ортогонально k.

Здесь также видим изменение ветвей спектра для волн распространяющихся перпендикулярно к магнитному полю. В частности, для изгибных колебаний квадратичная зависимость сменится на кубическую. Численно построили графики для различных случаев (смотри Рис. 2).

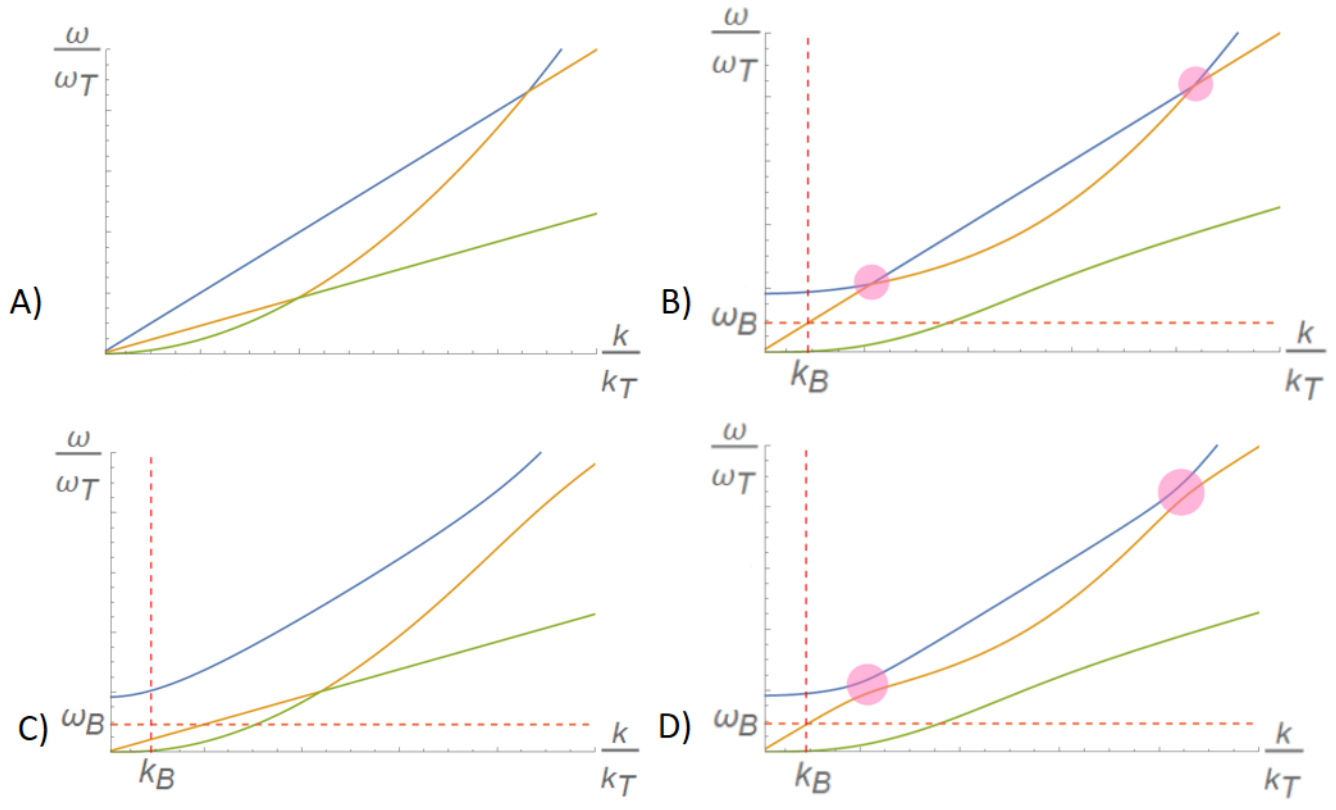

Рис. 2: Графики зависимости $\omega(k)$ для случаев A) Магнитное поле отсутствует, B) $\mathbf{B}$ в плоскости, параллельно $\mathbf{k}$, C) $\mathbf{B}$ в плоскости, ортогонально $\mathbf{k}$, D) $\mathbf{B}$ в плоскости, под некоторым углом к $\mathbf{k}$. Здесь $\omega_B = \frac{k_B T}{\hbar}$, $\omega_B = \gamma B$, $c_l k_\# = \omega_\#$.

5 Оценка масштабов

В предыдущих разделах имели характерную частоту связанную с магнитным полем γB, “конкурирующую” с характерной частотой ck (учтем, что $c_t \approx c_l$). Учитывая, что для мембраны с характерным размером L имеем $k \gtrsim \frac{1}{L}$, оценим размер мембраны L_B для которой существенным окажется поле $B = 1$ T. Для этого попытаемся удовлетворить равенству

$$\hbar \frac{c}{L_B} \sim \gamma B$$

Простейшей оценкой для γ есть предположение, что γ есть величина порядка магнетона Бора μ_B, с той лишь разницей, что массу электрона m_e следует заменить на массу ядра углерода M:

$$\gamma \sim \mu_B \frac{m_e}{M}$$

С учетом этого получаем оценку для L_B:

$$L_B \sim \frac{Mc\hbar}{\mu_B m_e B}$$

Подставляя численные значения (для графена)

$$M = 12 \text{ u} \approx 2 \times 10^{-26} \text{ kg}, \qquad m_e \approx 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$c_t \approx 1.3 \times 10^4 \text{ m/s}, \qquad c_l \approx 2 \times 10^4 \text{ m/s}$$

$$\hbar \approx 1 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}, \qquad \mu_B \approx 9 \times 10^{-24} \text{ J/T}$$

получаем для поля $B = 1$ T:

$$L_B \sim 3 \text{ mm}$$

Отметим, что это есть оценка для γ сверху. Вообще говоря, в силу экранирования ядра электронами, γ может стать меньше, а L_B соответственно больше, что не может не удручать.

6 Следствия изменения спектра фононов

С неизбежностью возникает вопрос – в каких экспериментальных величинах проявляется изменение спектра фононов?

Если при $T = 0$ мембрана имеет некоторую площадь S, то при ненулевой температуре, в следствии тепловых колебаний, проективная площадь мембраны становится $\xi^2 S$, где $\xi^2 \leqslant 1$. При этом известно, что

$$\xi^2 = 1 - \frac{\langle \partial_\alpha r_i \, \partial_\alpha r_i \rangle}{2}$$

Производя расчеты, с которыми можно ознакомиться в разделе аппендикса C, мы находим, что поправка $\delta\xi^2$, возникающая за счет наличия магнитного поля, есть

$$\delta\xi^2 = \frac{B^2\gamma^2}{(4\pi)^3 T \varkappa} \left[\frac{1}{g_t} \frac{\partial S(g_t)}{\partial g_t} + \{g_t \to g_l\} \right]$$

где

$$g_\# = \frac{c_\#^2 (\hbar)}{2\pi T (k_B)} \sqrt{\frac{\rho}{\varkappa}}$$

есть пара безразмерных параметров, которые для графена при $T = 300$ K порядка 1:

$$g_t \approx 1, \qquad g_l \approx 3$$

а $S(g)$ есть функция

$$S(g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\pi\frac{g}{n} + 2\ln\left(\frac{n}{g}\right)}{1+\frac{n^2}{g^2}}$$

которую в нашем случае $g \sim 1$ приходится считать численно.

Мы можем построить график функции $\frac{1}{g}\frac{\partial S(g)}{\partial g}$ для интересующих нас масштабов (смотри Рис. 3).

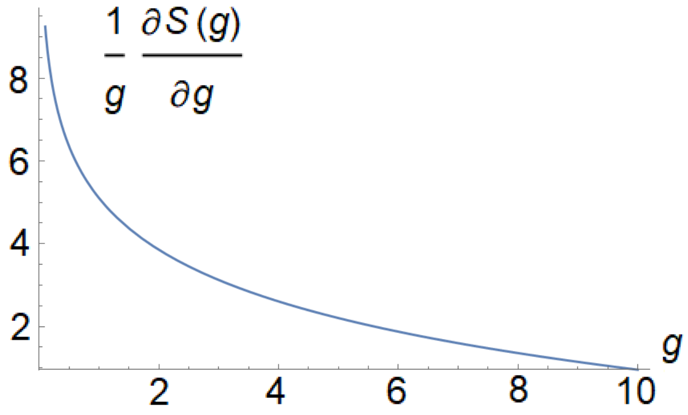

Рис. 3: Графики зависимости $\frac{1}{g}\frac{\partial S(g)}{\partial g}$ от g.

Отсюда видно, что в интересующих нас случаях множитель $\frac{1}{g}\frac{\partial S(g)}{\partial g}$ есть некоторое положительно число порядка единицы, а значит в присутствии магнитного поля величина ξ^2 должна расти – поле стабилизирует мембрану, увеличивая её проективную площадь.

7 Итоги

В свете всего вышесказанного мы ожидаем, что в общем случае магнитное поле может влиять на фононы, причем данное влияние может быть описано как взаимодействие спина фононов с магнитным полем.

В результате такого взаимодействия изменяется спектр фононов, причем зависимость меняется не только количественно, но и качественно, в частности, линейные ветви спектра могут сменяться на квадратичные и т.д. Предполагается, что для пленок графена с характерным размером 100 μm данные эффекты станут существенны в магнитных полях с индукцией выше 30 Т.

При этом, изменение спектра должно влиять и на наблюдаемые в экспериментах величины. В частности, в присутствии магнитного поля ожидается снижение тепловых колебаний и, как следствие, увеличение проективной площади мембраны.

A Вывод плотности спина поля деформаций

Исследуем преобразование поля вектора деформации $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ при повороте на инфинитезимальный угол $\delta\theta$ вокруг оси с направляющим единичным вектором $\mathbf{n}$.

Из геометрических соображений ясно, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ при таком повороте преобразуется следующим образом:

$$\mathbf{v} \quad \to \quad \mathbf{v} + \delta\theta\,[\mathbf{n}\times\mathbf{v}] = \mathsf{R}\mathbf{v}, \qquad \mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -\delta\theta\,n_z & \delta\theta\,n_y \\ \delta\theta\,n_z & 1 & -\delta\theta\,n_x \\ -\delta\theta\,n_y & \delta\theta n_x & 1 \end{bmatrix}$$

В частности, также преобразуется радиус-вектор $\mathbf{x}$. С учетом этого, поскольку значение произвольного скалярного поля $\varphi(\mathbf{x})$ не должно меняться при таком преобразовании, то сама функция должна преобразовываться следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{x}) \quad \to \quad \varphi(\mathsf{R}^{-1}\mathbf{x}) \approx \varphi(\mathbf{x}) - \delta\theta\,\mathbf{n}\cdot[\mathbf{x}\times\nabla]\varphi(\mathbf{x}) \tag{18}$$

Для векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ надо учесть, что пребразуется также и сам вектор поля, тогда получим:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \to \quad \mathsf{R}\mathbf{u}(\mathsf{R}^{-1}\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \delta\theta\,\mathbf{n}\cdot[\mathbf{x}\times\nabla]\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \delta\theta[\mathbf{n}\times\mathbf{u}(\mathbf{x})] = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + i\delta\theta\,\mathbf{n}\cdot(\mathbf{L}+\mathbf{S})\mathbf{u}(\mathbf{x}) \tag{19}$$

Здесь мы ввели вектор-операторы орбитального момента $\mathbf{L}$

$$L_x = i(y\partial_z - z\partial_y)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \quad L_y = i(z\partial_x - x\partial_z)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \quad L_x = i(x\partial_y - y\partial_x)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

описывающего преобразование поля, связанное с преобразованием радиус вектора (вклад, аналогичный тому, что имело и скалярное поле (18)) и собственного момента $\mathbf{S}$

$$S_x = -i\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}, \quad S_y = -i\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}, \quad S_z = -i\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

описывающего вклад, связанный с векторной природой поля. Подробнее смотри [5], [6].

С учетом преобразования (19) плотность Лагранжа (2) при поворотах должна преобразовываться как

$$\mathscr{L}[u] \quad \to \quad \mathscr{L}[u] + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\dot{u}_i)}\,\delta\dot{u}_i + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_i u_j)}\,\delta(\partial_i u_j)$$

Однако, как мы отметили выше, плотность Лагранжа должна быть инвариантна относительно таким преобразований, соответственно, получаем

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\dot{u}_i)}\,\delta\dot{u}_i + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_k u_i)}\,\delta(\partial_k u_i) = 0 \tag{20}$$

Учитывая, что $\delta\dot{u}_i = \partial_t(\delta u_i)$ и $\delta(\partial_k u_i) = \partial_k(\delta u_i)$, по тождеству Лейбница “перекидываем производные” и перепишем

$$\partial_t\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{u}_i}\,\delta u_i\right] + \partial_k\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_k u_i)}\,\delta u_i\right] - \left[\partial_t\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{u}_i} + \partial_k\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_k u_i)}\right]\delta u_i = 0$$

В силу уравнений Эйлера-Лагранжа множитель перед δu_i обнуляется и получаем

$$\partial_t\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{u}_i}\,\delta u_i\right] + \partial_k\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_k u_i)}\,\delta u_i\right] = 0 \tag{21}$$

Таким образом имеем выражение вида $\partial_t T_0 + \partial_k T_k = 0$. Проинтегрируем его по некоторому подмножеству Ω пространства-времени и применим теорему Стокса:

$$\int\limits_{\Omega} dt d^3x(\partial_t T_0 + \partial_k T_k) = \int\limits_{\partial\Omega} d\Sigma_\mu\, T_\mu = 0$$

где $T_\mu = (T_0, T_k)$, а $d\Sigma_\mu$ – четырехмерный вектор нормальный к элементу трехмерной поверхности $\partial\Omega$. Пусть область Ω ограничена двумя плоскостями $t = t_1$ и $t = t_2$, а в пространстве простирается до бесконечности где $u = 0$. Тогда последнее равенство можно переписать как

$$\int_{t=t_1} d^3x\, T_0 - \int\limits_{t=t_2} d^3x\, T_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\int d^3x T_0 = 0$$

И таким образом, получаем

$$\frac{d}{dt}\int d^3x\, \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{u}_i}\,\delta u_i = 0$$

Из явных выражений (2) и (19) имеем

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial \dot{u}_i)} = \rho \dot{u}_i, \qquad \delta u_i = i\delta\theta\, n_m(L_{m,ik} + S_{m,ik})u_k$$

И приходим к выражению

$$i\delta\theta\, n_m \left[\frac{d}{dt}\int d^3x\, \rho\dot{u}_i(L_{m,ik} + S_{m,ik})u_k\right] = 0$$

Причем, данное равенство должно обращаться в нуль при любых $\delta\theta$ и n_m, а значит имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\int d^3x(l_m + s_m) = 0 \tag{22}$$

где

$$l_m = \rho\dot{u}_i L_{m,ik}u_k, \qquad s_m = \rho\dot{u}_i S_{m,ik}u_k \tag{23}$$

Выражение (22) и есть искомый закон сохранения связанный с симметрией относительно $SO(3)$. Векторы l_m и s_m есть соответственно векторы плотности орбитального момента и спина, соответственно. Подставляя в (23) явные выражения для операторов $L_{m,ik}$ и $S_{m,ik}$ получим (3).

B Расчеты ветвей спектра

Изотропная среда

Имеем характеристическое уравнение (10), которое имеет вид $\det Q = 0$ для матрицы

$$Q_{ik} = (\rho\omega^2 + \mu k^2)\delta_{ij} + (\lambda + \mu)k_i k_j + 2\gamma\rho\omega\epsilon_{ijk}B_k$$

Введем координаты $Ox_1x_2x_3$ так, что ось $Ox_1 \,||\, \mathbf{k}$ и вектор магнитного поля $\mathbf{B}$ лежал в плоскости Ox_1x_2. Тогда $k_i = (k, 0, 0)$ и $B_i = (B\cos\varphi, B\sin\varphi, 0)$. Матрица Q_{ij} примет тогда вид

$$Q = \rho\begin{bmatrix} \omega^2 + c_l^2k^2 & 0 & -2\gamma\omega B\sin\varphi \\ 0 & \omega^2 + c_t^2k^2 & 2\gamma\omega B\cos\varphi \\ 2\gamma\omega B\sin\varphi & -2\gamma\omega B\cos\varphi & \omega^2 + c_t^2k^2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

a) Случай k || B. В таком случае матрица (24) примет вид

$$Q = \rho \begin{bmatrix} \omega^2 + c_l^2 k^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 + c_t^2 k^2 & 2\gamma\omega B \\ 0 & -2\gamma\omega B & \omega^2 + c_t^2 k^2 \end{bmatrix}$$

и характеристическое уравнение такой системы есть

$$(\omega^2 + c_l^2 k^2)(\omega^4 + 2(c_t^2 k^2 + 2\gamma^2 B^2)\omega^2 + c_t^4 k^4) = 0$$

Корни элементарно находятся по школьной формуле

$$\omega_1^2 = c_l^2 k^2, \qquad \omega_{2,3}^2 = k^2 \left(c_t^2 + 2\gamma^2 \frac{B^2}{k^2} \pm \sqrt{\left(c_t^2 + 2\gamma^2 \frac{B^2}{k^2} \right)^2 - c_t^4} \right)$$

b) Случай k⊥B. Теперь матрица (24) примет вид

$$Q = \rho \begin{bmatrix} \omega^2 + c_l^2 k^2 & 0 & -2\gamma\omega B \\ 0 & \omega^2 + c_t^2 k^2 & 0 \\ 2\gamma\omega B & 0 & \omega^2 + c_t^2 k^2 \end{bmatrix}$$

и характеристическое уравнение

$$(\omega^2 + c_t^2 k^2)(\omega^4 + (c_t^2 k^2 + c_l^2 k^2 + 4\gamma^2 B^2)\omega^2 + c_t^2 c_l^2 k^4) = 0$$

Тогда корни

$$\omega_2^2 = c_t^2 k^2, \qquad \omega_{1,3}^2 = k^2 \frac{c_l^2 + c_t^2 + 4\gamma^2 \frac{B^2}{k^2} \pm \sqrt{(c_l^2 + c_t^2 + 4\gamma^2 \frac{B^2}{k^2})^2 - 4c_l^2 c_t^2}}{2}$$

Двумерная мембрана

Решаем аналогичную задачу с матрицей

$$Q_{ij} = (\omega^2 + k^2 c_t^2)\delta_{\alpha\beta} + (c_l^2 - c_t^2)k_\alpha k_\beta + \left(\omega^2 + \frac{\varkappa}{\rho} k^4 \right) \delta_{3i}\delta_{3j} + 2\gamma\omega\epsilon_{ijk} B_k$$

Направим также оси координат и матрица примет вид

$$Q = \begin{bmatrix} \omega^2 + c_l^2 k^2 & 0 & -2\gamma\omega B \sin\varphi \\ 0 & \omega^2 + c_t^2 k^2 & 2\gamma\omega B \cos\varphi \\ 2\gamma\omega B \sin\varphi & -2\gamma\omega B \cos\varphi & \omega^2 + \frac{\varkappa}{\rho} k^4 \end{bmatrix} \tag{25}$$

соответственно расммотрим следующие случаи.

a) Поле B нормально к плоскости мембраны. Матрица Q_{ij} принимает вид

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} \omega^2 + c_l^2 k^2 & 2\gamma\omega B & 0 \\ -2\gamma\omega B & \omega^2 + c_t^2 k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 + \frac{\varkappa}{\rho} k^4 \end{bmatrix}$$

и характеристическое уравнение соответственно

$$\left(\omega^2 + \frac{\varkappa}{\rho} k^4 \right) (\omega^4 + \omega^2 [k^2 c_l^2 + k^2 c_t^2 + 4B^2 \gamma^2 n] + c_l^2 c_t^2 k^4) = 0$$

Таким образом имеем корни

$$\omega_{1,2}^2 = k^2 \frac{c_l^2 + c_t^2 + 4\frac{B^2\gamma^2}{k^2} \pm \sqrt{(c_l^2 + c_t^2 + 4\frac{B^2\gamma^2}{k^2})^2 - 4c_l^2 c_t^2}}{2}$$

$$\omega_3^2 = \frac{\varkappa}{\rho} k^4$$

b) Поле B в плоскости, ортогонально k. Теперь имеем Q_{ij} в виде

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} \omega^2 + c_l^2 k^2 & 0 & -2\gamma\omega B \\ 0 & \omega^2 + c_t^2 k^2 & 0 \\ 2\gamma\omega B & 0 & \omega^2 + \frac{\varkappa}{\rho} k^4 \end{bmatrix}$$

и характеристическое уравнение есть

$$(\omega^2 + c_t^2 k^2) \left(\omega^4 + \omega^2 \left[k^2 c_l^2 + \frac{\varkappa}{\rho} k^4 + 4B^2\gamma^2 \right] + \frac{\varkappa}{\rho} c_l^2 k^6 \right) = 0$$

Отсюда корни

$$\omega_1^2 = k^2 c_t^2$$

$$\omega_{2,3}^2 = k^2 \frac{c_l^2 + 4\frac{B^2\gamma^2}{k^2} + \frac{\varkappa}{\rho} k^2 \pm \sqrt{\left(c_l^2 + 4\frac{B^2\gamma^2}{k^2} + \frac{\varkappa}{\rho} k^2 \right)^2 - 4\frac{\varkappa}{\rho} c_l^2 k^2}}{2}$$

c) Поле B в плоскости, параллельно k. Имеем матрицу Q_{ij}

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} \omega^2 + c_l^2 k^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 + c_t^2 k^2 & 2\gamma\omega B \\ 0 & -2\gamma\omega B & \omega^2 + \frac{\varkappa}{\rho} k^4 \end{bmatrix}$$

Характеристическое уравнение принимает вид

$$(\omega^2 + c_l^2 k^2) \left(\omega^4 + \omega^2 \left[k^2 c_t^2 + \frac{\varkappa}{\rho} k^4 + 4B^2\gamma^2 \right] + \frac{\varkappa}{\rho} c_t^2 k^6 \right) = 0$$

Отсюда корни

$$\omega_1^2 = k^2 c_l^2$$

$$\omega_{2,3}^2 = k^2 \frac{c_t^2 + 4\frac{B^2\gamma^2}{k^2} + \frac{\varkappa}{\rho} k^2 \pm \sqrt{\left(c_t^2 + 4\frac{B^2\gamma^2}{k^2} + \frac{\varkappa}{\rho} k^2 \right)^2 - 4\frac{\varkappa}{\rho} c_t^2 k^2}}{2}$$

C Усреднение $\partial_\alpha r_i \, \partial_\alpha r_i$

Хотим найти

$$\langle \partial_\alpha r_i(x,\tau) \, \partial_\alpha r_i(x,\tau) \rangle$$

где усреднять будем по всевозможным конфигруациям $r_i(x,\tau)$. При этом, утверждается, что вероятность некоторой конфигурции r_i есть

$$P[r_i] \sim \exp\left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^2x \, \mathscr{L}[r_i] \right\}, \qquad \beta = \frac{1}{T}$$

Разложим $r_i(x,\tau)$ в “ряд Фурье”:

$$r_i(x,\tau) = T \sum_{\mathbf{k},\omega} r_{i,\mathbf{k},\omega} \, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega\tau}, \qquad r_{i,-\mathbf{k},-\omega} = r_{i,\mathbf{k},\omega}^*$$

при этом по $\mathbf{k}$ следует понимать сумму как интеграл Фурье, а по ω суммирование идет по частотам $\omega_n = 2\pi T n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} d^2x\, e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = 4\pi^2\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')$$

и для $\omega, \omega' \in 2\pi T\mathbb{Z}$

$$\int\limits_0^\beta d\tau\, e^{-i(\omega+\omega')\tau} = \frac{1-e^{-i\beta(\omega+\omega')}}{i(\omega+\omega')} = \beta\,\delta_{\omega,-\omega'} = \begin{cases}\beta, & \omega+\omega'=0\\ 0, & \omega+\omega'\neq 0\end{cases}$$

С учетом этого, подставляя в плотность Лагранжа $r_i(x,\tau)$ в виде ряда Фурье и далее интегрируя получим

$$-\int\limits_0^\beta d\tau \int dx^2\, \mathscr{L}[r_i] = \sum_{\mathbf{k},\omega} Q_{ij} r_{i,\mathbf{k},\omega} r^*_{j,\mathbf{k},\omega^2}$$

где

$$Q_{ij} = 2\pi^2\rho T\left[(\omega^2+c_t^2k^2)\delta_{\alpha\beta} + \left(\omega^2+\frac{\varkappa}{\rho}k^4\right)\delta_{3i}\delta_{3j} + (c_l^2-c_t^2)k_\alpha k_\beta - \gamma\omega\epsilon_{ijk}B_k\right]$$

Тогда получаем

$$P[r_i] = \exp\left\{-\sum_{\mathbf{k},\omega} Q_{ij} r_{i,\mathbf{k},\omega} r_{j,\mathbf{k},\omega}\right\}$$

или подставляя одну гармонику $r_i = r_{i,\mathbf{k},\omega}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega\tau}$ находим

$$P[r_{i,\mathbf{k},\omega}] = e^{-Q_{ij} r_{i,\mathbf{k},\omega} r^*_{j,\mathbf{k},\omega}}$$

При этом исходно хотим найти

$$\langle\partial_\alpha r_i\,\partial_\alpha r_i\rangle = -\left\langle T^2 \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\omega,\omega'} k_\alpha k'_\alpha r_{i,\mathbf{k},\omega} r_{i,\mathbf{k}',\omega'} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}-i(\omega+\omega')\tau}\right\rangle =$$

$$= -T^2 \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\omega,\omega'} k_\alpha k'_\alpha \langle r_{i,\mathbf{k},\omega} r_{i,\mathbf{k}',\omega'}\rangle e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}-i(\omega+\omega')\tau}$$

Вспомним, что $r_{i,\mathbf{k},\omega}$ есть некоторое комплексное число, причем $P[r_{i,\mathbf{k},\omega}] = P[-r_{i,\mathbf{k},\omega}]$, а значит оно имеет нулевое среднее. В общем случае $\langle r_{i,\mathbf{k},\omega} r_{i,\mathbf{k}',\omega'}\rangle$ есть среднее от произведения независимых величин с нулевым средним, которое также обращается в нуль. Исключение составляет случай $(\mathbf{k}',\omega') = (-\mathbf{k},-\omega)$, тогда $\langle r_{i,\mathbf{k},\omega} r_{i,\mathbf{k}',\omega'}\rangle = \langle |r_{i,\mathbf{k},\omega}|^2\rangle$ и получим

$$\langle\partial_\alpha r_i\,\partial_\alpha r_i\rangle = T^2 \sum_{\mathbf{k},\omega} k^2 \langle |r_{i,\mathbf{k},\omega}|^2\rangle$$

Таким образом, остается найти $\langle |r_{i,\mathbf{k},\omega}|^2\rangle$. Для этого положим $r_{i,\mathbf{k},\omega} = x_i + i\,y_i$ и тогда из общих соображений получим

$$\int_{\mathbb{C}^3} d^3z\, P[r_{i,\mathbf{k},\omega}] = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x\, e^{-Q_{ij}x_ix_j}\right)^2 = \frac{\pi^3}{\det Q}$$

$$\int_{\mathbb{C}^3} d^3z\, |r_{i,\mathbf{k},\omega}|^2 P[r_{i,\mathbf{k},\omega}] = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x\, e^{-Q_{ij}x_ix_j} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3y\, e^{-Q_{ij}y_iy_j}(x_ix_i + y_iy_i) = \frac{2\pi^{3/2}}{\sqrt{\det Q}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x\, x_ix_i\, e^{-Q_{ij}x_ix_j} =$$

$$= \frac{\pi^3}{\det Q}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}\right)$$

Откуда

$$\langle |r_{i,\mathbf{k},\omega}|^2\rangle = \frac{\int_{\mathbb{C}^3} d^3z\, |r_{i,\mathbf{k},\omega}|^2 P[r_{i,\mathbf{k},\omega}]}{\int_{\mathbb{C}^3} d^3z\, P[r_{i,\mathbf{k},\omega}]} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = \operatorname{Tr} Q^{-1}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – собственные числа матрицы Q. Таким образом, получаем

$$\langle \partial_\alpha r_i\, \partial_\alpha r_i\rangle = T^2 \sum_{\mathbf{k},\omega} k^2 \,\operatorname{Tr} Q^{-1}(\mathbf{k},\omega)$$

Будем рассматривать случай, когда вектор $\mathbf{B}$ лежит в плоскости мембраны. Систему координат $Ox_1x_2x_3$ введем так, что Ox_3 нормально к плоскости мембраны (как и предполагалось ранее), а также, чтобы $Ox_1 \,||\, \mathbf{k}$. Тогда $k_\alpha = (k, 0)$ и $B_i = (B\cos\varphi, B\sin\varphi, 0)$. Матрица Q_{ij} принимает вид

$$Q_{ij} = 2\pi^2\rho T \begin{bmatrix} \omega^2 + c_l^2k^2 & 0 & -\gamma\omega B\sin\varphi \\ 0 & \omega^2 + c_t^2k^2 & \gamma\omega B\cos\varphi \\ \gamma\omega B\sin\varphi & -\gamma\omega B\cos\varphi & \omega^2 + \frac{\varkappa}{\rho}k^4 \end{bmatrix}$$

Перепишем матрицу Q в виде

$$Q = Q^{(0)} + BQ^{(1)}$$

где

$$Q^{(0)} = 2\pi^2\rho T \begin{bmatrix} \omega^2 + c_l^2k^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 + c_t^2k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 + \frac{\varkappa}{\rho}k^4 \end{bmatrix}, \qquad Q^{(1)} = 2\pi^2\rho T \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\gamma\omega\sin\varphi \\ 0 & 0 & \gamma\omega\cos\varphi \\ \gamma\omega\sin\varphi & -\gamma\omega\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда обратную матрицу будем искать в виде

$$Q^{-1} = R^{(0)} + BR^{(1)} + B^2R^{(2)} + o(B^2)$$

Подставляя в таком виде матрицу в равенство $QQ^{-1} = E$ получим

$$E = Q^{(0)}R^{(0)} + B\left[Q^{(1)}R^{(0)} + Q^{(0)}R^{(1)}\right] + B^2\left[Q^{(0)}R^{(2)} + Q^{(1)}R^{(1)}\right] + o(B^2)$$

Откуда находим

$$R^{(0)} = [Q^{(0)}]^{-1} = \frac{1}{2\pi^2T\rho} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega^2+c_l^2k^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega^2+c_t^2k^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega^2+\frac{\varkappa}{\rho}k^4} \end{bmatrix}$$

$$R^{(1)} = -[Q^{(0)}]^{-1}Q^{(1)}[Q^{(0)}]^{-1} = \frac{1}{2\pi^2\rho T\left(\omega^2 + \frac{\varkappa}{\rho}k^4\right)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\gamma\omega\sin\varphi}{\omega^2+c_l^2k^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma\omega\cos\varphi}{\omega^2+c_t^2k^2} \\ -\frac{\gamma\omega\sin\varphi}{\omega^2+c_l^2k^2} & \frac{\gamma\omega\cos\varphi}{\omega^2+c_t^2k^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^{(2)} = [Q^{(0)}]^{-1}Q^{(1)}[Q^{(0)}]^{-1}Q^{(1)}[Q^{(0)}]^{-1} = \ldots$$

И поскольку матрица $R^{(1)}$ бесследовая, получаем

$$\operatorname{Tr} Q^{-1}(\mathbf{k},\omega) = \operatorname{Tr} R^{(0)} + B^2 \operatorname{Tr} R^{(2)} + o(B^2) = \frac{1}{2\pi^2T\rho}\left(\frac{1}{\omega^2 + c_l^2k^2} + \frac{1}{\omega^2 + c_t^2k^2} + \frac{1}{\omega^2 + \frac{\varkappa}{\rho}k^4}\right) +$$

$$-\frac{B^2\gamma^2\omega^2}{2\pi^2T\rho}\left[\frac{2\omega^2 + c_t^2k^2 + \frac{\varkappa}{\rho}k^4}{(\omega^2 + c_t^2k^2)^2(\omega^2 + \frac{\varkappa}{\rho}k^4)^2}\cos^2\varphi + \frac{2\omega^2 + c_l^2k^2 + \frac{\varkappa}{\rho}k^4}{(\omega^2 + c_l^2k^2)^2(\omega^2 + \frac{\varkappa}{\rho}k^4)^2}\sin^2\varphi\right]$$

$$= \ldots + \frac{B^2\gamma^2\omega^2}{2\pi^2T\rho}\frac{\partial}{\partial\omega^2}\left[\frac{1}{(\omega^2 + c_t^2k^2)(\omega^2 + \frac{\varkappa}{\rho}k^4)} + \frac{1}{(\omega^2 + c_l^2k^2)(\omega^2 + \frac{\varkappa}{\rho}k^4)}\right]$$

Далее проинтегрируем по $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} k^2 \operatorname{Tr} Q^{-1}(\mathbf{k}, \omega) = \int\limits_0^\infty \frac{k^3\, dk}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \operatorname{Tr} Q^{-1}(k, \varphi, \omega) = I_0 +$$

$$+ \frac{B^2\gamma^2\omega^2}{(2\pi)^3 T\rho} \frac{\partial}{\partial\omega^2} \int\limits_0^\infty dk\, k^3 \left[\frac{1}{(\omega^2 + c_t^2 k^2)(\omega^2 + \frac{\varkappa}{\rho} k^4)} + \frac{1}{(\omega^2 + c_l^2 k^2)(\omega^2 + \frac{\varkappa}{\rho} k^4)} \right] = \{k = \omega x\} =$$

$$= I_0 + \frac{B^2\gamma^2\omega^2}{(2\pi)^3 T\rho} \frac{\partial}{\partial\omega^2} \int\limits_0^\infty dx\, x^3 \left[\frac{1}{(1 + c_t^2 x^2)(1 + \frac{\varkappa}{\rho}\omega^2 x^4)} + \frac{1}{(1 + c_l^2 x^2)(1 + \frac{\varkappa}{\rho}\omega^2 x^4)} \right] =$$

$$= I_0 + \frac{B^2\gamma^2\omega^2}{(2\pi)^3 T\rho} \frac{\partial}{\partial\omega^2} \left[\frac{\pi \frac{c_t^2}{\omega} \sqrt{\frac{\rho}{\varkappa}} + \ln\left(\frac{\varkappa\omega^2}{\rho c_t^4}\right)}{4(c_t^4 + \frac{\varkappa}{\rho}\omega^2)} + \{c_t \to c_l\} \right]$$

При $\omega = 0$ данный интеграл равен I_0, так как $\operatorname{Tr} R^{(2)}(\mathbf{k}, 0) = 0$. Далее подставим $\omega = 2\pi T n$, где $n \in \mathbb{N}$ и введем безразмерные параметры

$$g_t = \frac{c_t^2(\hbar)}{2\pi T(k_B)} \sqrt{\frac{\rho}{\varkappa}}, \qquad g_l = \frac{c_l^2(\hbar)}{2\pi T(k_B)} \sqrt{\frac{\rho}{\varkappa}}$$

перепишем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} d^2k\, k^2 \operatorname{Tr} Q^{-1}(\mathbf{k}, \omega) = I_0 + \frac{B^2\gamma^2 n}{2(2\pi)^3 T^3 \varkappa} \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\frac{\pi}{n} g_t + \ln\left(\frac{n^2}{g_t^2}\right)}{4 g_t^2 \left(1 + \frac{n^2}{g_t^2}\right)} + \{g_t \to g_l\} \right]$$

Численно для графена имеем $\varkappa = 1$ eV, $\rho = 0.8$ mg/m2, $c_t = 1.3 \times 10^4$ m/s, $c_l = 2 \times 10^4$ m/s. Получаем при $T \sim 300$ K

$$g_t \approx 1, \qquad g_l \approx 3$$

Множитель зависящий от n имеет вид

$$n \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{f\left(\frac{n}{g_t}\right)}{g_t^2} \right], \qquad \text{где} \quad f(x) = \frac{\frac{\pi}{x} + \ln(x^2)}{4(1 + x^2)}$$

Из общих соображений заметим, что

$$n \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{f\left(\frac{n}{g_t}\right)}{g_t^2} \right] = \frac{n}{g_t^2} \frac{\partial}{\partial n} f\left(\frac{n}{g_t}\right) = \frac{n}{g_t^3} f'\left(\frac{n}{g_t}\right) = -\frac{1}{g_t} \frac{\partial}{\partial g_t} f\left(\frac{n}{g_t}\right)$$

Тогда запишем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} d^2k\, k^2 \operatorname{Tr} Q^{-1}(\mathbf{k}, \omega) = I_0 - \frac{B^2\gamma^2}{(4\pi)^3 T^3 \varkappa} \left[\frac{1}{g_t} \frac{\partial}{\partial g_t} \frac{\frac{\pi}{n} g_t + \ln\left(\frac{n^2}{g_t^2}\right)}{1 + \frac{n^2}{g_t^2}} + \{g_t \to g_l\} \right]$$

И наконец

$$\langle \partial_\alpha r_i\, \partial_\alpha r_i \rangle = T^2 \sum_{\mathbf{k}, \omega} k^2 \operatorname{Tr} Q^{-1}(\mathbf{k}, \omega) = \langle \partial_\alpha r_i\, \partial_\alpha r_i \rangle_0 - \frac{2B^2\gamma^2}{(4\pi)^3 T \varkappa} \left[\frac{1}{g_t} \frac{\partial}{\partial g_t} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\pi \frac{g_t}{n} + \ln\left(\frac{n^2}{g_t^2}\right)}{1 + \frac{n^2}{g_t^2}} \right) + \{g_t \to g_l\} \right]$$

Таким образом задача свелась к нахождению суммы ряда

$$S(g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\pi \frac{g}{n} + 2\ln\left(\frac{n}{g}\right)}{1+\frac{n^2}{g^2}}$$

Рассмотрим предельный случай $g \ll 1$. В таком случае всегда имеем $1 \ll \frac{n^2}{g^2}$ и $\ln\left(\frac{n}{g}\right) \gg \frac{g}{n}$, соответственно получаем

$$S(g) \approx 2g^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln(n)-\ln(g)}{n^2} = \frac{\pi^2 g^2}{3}\left(\alpha - \ln(2\pi g)\right)$$

Где $\alpha = 12\ln A - \gamma_E \approx 2.4$ и A – постоянная Глейшера, γ_E – постоянная Эйлера-Маскерони.

В иных ситуациях простые оценки для $S(g)$ невозможны, поэтому значение данной функции необходимо находить численно.

Как показывают расчеты, для интересующего нас интервала $g \in (0.1{,}10)$ с точностью до 10% верна оценка

$$S(g) \approx g^2(3.0 - 0.9\cdot\ln(g))$$

Список литературы

[1] A. Holz, Phonons in a Strong Magnetic Field, Nuov Cim B **9**, 83-95 (1972)

[2] K. Regiński, Phonon Polaritons in the Presence of Magnetic Field, phys. stat. sol. (b) **118**, 587 (1983)

[3] Andrey Baydin et al., Magnetic Control of Soft Chiral Phonons in PbTe, Phys. Rev. Lett. **128**, 075901 (2022)

[4] С.В. Вонсовский и М.С. Свирский, О Спине Фононов, Физика Твердого Тела **3**, 2160 (1961)

[5] С.В. Гупалов, Классические Задачи Теории Упругости и Квантовая Теория Углового Момента, Успехи Физических Наук **190**, 63 (2020)

[6] Jie Ren, From Elastic Spin to Phonon Spin: Symmetry and Fundamental Relations, Chinese Physics Letters **39**, 126301 (2022)

[7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теоретическая физика, Т. VII, Теория упругости, Наука, М., 1987, 248 с.