Когерентный вихрь в условиях слабой неоднородности

1 Уравнения на гармоники

Для уравнений Навье-Стокса в полярных координатах, с неизотропным возмущением коэффициента $\delta\alpha = Ar\cos\varphi$, с учетом несжимаемости:

$$\partial_r(rv_r) + \partial_\varphi v_\varphi = 0 \tag{1}$$

$$\begin{cases} (\alpha+\delta\alpha)v_r + \frac{1}{r}(v_r^2 - v_\varphi^2) + (\partial_r v_r^2 + \frac{1}{r}\partial_\varphi(v_r v_\varphi)) + \partial_r p = 0 \\ (\alpha+\delta\alpha)v_\varphi + \frac{2}{r}(v_r v_\varphi) + (\partial_r(v_r v_\varphi) + \frac{1}{r}\partial_\varphi v_\varphi^2) + \frac{1}{r}\partial_\varphi p = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим поле скоростей из двух компонент: флуктурирующей и усредненной по времени части, будем искать поправку к усредненной части в виде первых гармоник по углу w_i:

$$\begin{cases} v_r = w_r + u_r \\ v_\varphi = w_\varphi + U + u_\varphi \end{cases} \tag{3}$$

Вводя тензор для флуктурирующих скоростей:

$$\Pi_{ij} =< u_i u_j > \tag{4}$$

После усреднения по времени получаем систему уравнений на первую гармонику:

$$\begin{cases} \alpha w_r + \frac{1}{r}(\Pi_{rr} - \Pi_{\varphi\varphi} - 2Uw_\varphi) + \partial_r \Pi_{rr} + \frac{1}{r}\partial_\varphi \Pi_{r\varphi} - \frac{U}{r}\partial_\varphi w_r = 0 \\ \alpha w_\varphi + ArU\cos\varphi + \frac{2}{r}(\Pi_{r\varphi} + Uw_r) + \partial_r \Pi_{r\varphi} + U\partial_r w_r + \frac{1}{r}\partial_\varphi \Pi_{\varphi\varphi} + \frac{2U}{r}\partial_\varphi w_\varphi = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Тогда ищем поправки в виде:

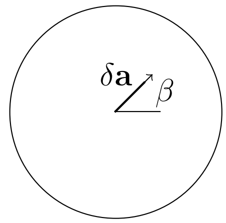
$$w_r = a\cos\varphi \quad w_\varphi = b\sin\varphi \quad \Pi_{\varphi\varphi} = c\sin\varphi \quad \Pi_{rr} = d\sin\varphi \quad \Pi_{r\varphi} = \frac{\epsilon}{\Sigma} + e\cos\varphi \tag{6}$$

Подставляя в уравнения с учетом малости α, получаем итоговую систему:

$$\begin{cases} \frac{-U(2b+a)}{r} + d' + \frac{d}{r} - \frac{c+e}{r} = 0 \\ U(A + \frac{2}{r}a + a' + \frac{2}{r}b) + (\frac{2}{r}e + e') + \frac{c}{r} = 0 \\ a + ra' + b = 0 \end{cases} \tag{7}$$

1.1 Сдвиговая мода

При перемещении центра вихря на малый вектор $\delta\mathbf{a}$:

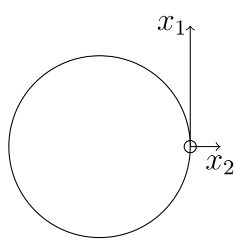


$$w_r = -U\frac{\delta a}{r}\sin(\varphi - \beta) = -U\frac{\delta a}{r}\sin\varphi\cos\beta + U\frac{\delta a}{r}\cos\varphi\sin\beta$$
$$w_\varphi = U\cos\alpha - U = 0$$

Полученная подстановка $w_r = a\cos\varphi$ допускает дрейф вихря как целого только в перпендикулярном неоднородности направлении.

2

Для сдвигового течения:



$$w_r = a\cos\varphi = a \tag{8}$$

$$w_\varphi = U + b\sin\varphi = U + b\frac{x_1}{R} \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Sigma x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha - \nu(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2}) + a\frac{\partial}{\partial x_2} + (U + \frac{bx_1}{R})\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\mathcal{G}(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{10}$$

После преобразования Фурье:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Sigma k_1\frac{\partial}{\partial k_2} + \alpha + \nu(k_1^2 + k_2^2) + ik_2 a + ik_1 U - \frac{b}{R}k_1\frac{\partial}{k_1}\right)\mathcal{G}(t,\mathbf{k},\mathbf{q}) = (2\pi)^2\delta(t)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \tag{11}$$

Решая методом характеристик:

$$\begin{cases} \dot{k_1} = -\frac{b}{R}k_1 \\ \dot{k_2} = -\Sigma k_1 \end{cases} \tag{12}$$

Оставляем члены до первого порядка по b:

$$\begin{cases} k_1 = q_1(1 - \frac{b}{R}t) \\ k_2 = q_2 - q_1\Sigma t + \frac{q_1 b\Sigma}{2R}t^2 \end{cases} \tag{13}$$

В итоге, для функции Грина:

$$\mathcal{G}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = (2\pi)^2\delta(k_1 - q_1(1 - \frac{b}{R}t))\delta(k_2 - q_2 + q_1\Sigma t - q_1\frac{b\Sigma}{2R}t^2)\theta(t)G(t, \mathbf{q}) \tag{14}$$

$$G(t, \mathbf{q}) = \exp\left(-\alpha t - ... - \Lambda(\mathbf{q})\right) \tag{15}$$

- где $\Lambda(\mathbf{q})$ - выражение, линейное по компонентам $\mathbf{q}$.

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{k}, q) = 2\epsilon \int d\tau \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}p^2\tilde{\Xi}(\mathbf{p})\mathcal{G}(t + \tau, \mathbf{k}, \mathbf{p})\mathcal{G}(\tau, \mathbf{q}, -\mathbf{p}) \tag{16}$$

Сингулярная часть $\mathcal{F}$:

$$\delta(k_1 - p_1(1 - \frac{b}{R}(t+\tau)))\delta(k_2 - p_2 + p_1\Sigma(t+\tau) - p_1\frac{b\Sigma}{2R}(t+\tau)^2)\delta(q_1 + p_1(1 - \frac{b}{R}\tau))\delta(q_2 + p_2 + p_1\Sigma\tau - p_1\frac{b\Sigma}{2R}\tau^2) \tag{17}$$

Из сингулярной части можно получить связь для $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{k}$

$$\mathcal{F}(0, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = 2\epsilon(2\pi)^2\delta(\mathbf{q} + \mathbf{k})\int d\tau \mathbf{p^2}\tilde{\Xi}(\mathbf{p})G(\tau, \mathbf{p})G(\tau, -\mathbf{p}) \tag{18}$$

Подставляя в коррелятор, получаем:

$$< u_r(\mathbf{0}, 0)u_\varphi(\mathbf{0}, 0) >= \int \frac{d^2kd^2q}{(2\pi)^4}\frac{k_1q_2}{k^2q^2}\mathcal{F}(0, \mathbf{q}, \mathbf{k}) \tag{19}$$

Так как значение τ определяется знаменателем, и уравнения слабо отличаются от случая $b = 0$, то $G(\tau, \mathbf{p}) \approx 1$. Тогда необходимо найти интеграл:

$$-\int_0^\infty d\tau \frac{p_1(1 - \frac{b}{R}\tau)(p_2 - p_1\Sigma\tau + p_1\frac{b\Sigma}{2R}\tau^2)}{(p_1^2(1 - \frac{b}{R}\tau)^2 + (p_2 - p_1\Sigma\tau + p_1\frac{b\Sigma}{2R}\tau^2)^2)^2} \tag{20}$$

Раскладывая его по степеням b и оставляя только нулевой и первый порядок, получаем:

$$\int_0^\infty d\tau \left(\frac{p_1(p_1\Sigma\tau - p_2)}{(p_1^2 + (p_2 - p_1\Sigma\tau)^2)^2} + \frac{b}{2R}\frac{p_1\tau(p_1^2(5p_1\Sigma\tau - 6p_2) + (p_2 - p_1\Sigma\tau)^2)(2p_2 + p_1\Sigma\tau)}{(p^2 + (q - p_1\Sigma\tau)^2)^3}\right) \tag{21}$$

Тогда итоговая поправка к невозмущенной задаче:

$$\frac{b}{2R}\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\tilde{\Xi}(\mathbf{p})\mathbf{p}^2\int_0^\infty d\tau \left(\frac{p_1\tau(p_1^2(5p_1\Sigma\tau - 6p_2) + (p_2 - p_1\Sigma\tau)^2)(2p_2 + p_1\Sigma\tau)}{(p^2 + (q - p_1\Sigma\tau)^2)^3}\right) \tag{22}$$

Взяв интеграл по τ получаем:

$$\frac{bp_1}{2Rp_1^2\Sigma^2}\left(\frac{\pi}{2|p_1|} + \frac{p_1}{p_1^2 + p_2^2} + \frac{\operatorname{arctg}(\frac{p_2}{p_1})}{p_1}\right) \tag{23}$$

Аналогично, находим поправку в $< u_r(\mathbf{0},0)u_r(\mathbf{0},0) >$

$$\frac{b}{2R}\frac{p^2}{p_1^2\Sigma^2}\frac{\frac{p_1^3}{p_1^2+p_2^2}-\pi p_2 p_1-2p_2\operatorname{arctg}\frac{p_2}{p_1}+2p_1}{p_1^3} \tag{24}$$

Для поправки в $< u_\varphi(\mathbf{0},0)u_\varphi(\mathbf{0},0) >$, получаем интеграл по τ:

$$-\int_0^\infty d\tau\frac{(p_2-p_1\Sigma\tau+p_1\frac{b\Sigma}{2R}\tau^2)^2}{(p_1^2(1-\frac{b}{R}\tau)^2+(p_2-p_1\Sigma\tau+p_1\frac{b\Sigma}{2R}\tau^2)^2)^2} \tag{25}$$

Разлагая до первого порядка по b:

$$-\int_0^\infty d\tau\frac{b}{R}\frac{\tau(p_1\Sigma\tau-p_2)(p^2(3p_1\Sigma\tau-4p_2)+p_1\Sigma\tau(p_2-p_1\Sigma\tau)^2)}{(p^2+(q-p_1\Sigma\tau)^2)^3}\exp\left(-\frac{1}{3}\nu p_1\Sigma^2 q_1^2\tau^3\right)\sim\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau\frac{1}{\tau} \tag{26}$$

Найдем логарифмический интеграл в пределах $\tau_2=\left(\frac{3}{\nu p_1\Sigma^2 q_1^2}\right)^{1/3}$ и $\tau_1=\frac{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}{p_1\Sigma}$
Тогда итоговое выражение для поправки:

$$-\frac{2b}{3Rp_1^2\Sigma^2}\ln\frac{\Sigma}{\nu p_1\sqrt{p_1^2+p_2^2}} \tag{27}$$

Аналогично, найдем поправки для сдвигового течения вблизи $\varphi=\frac{\pi}{2}$

$$w_r=-a\cos\varphi=-a\frac{x_1}{R} \tag{28}$$

$$w_\varphi=U+b\sin\varphi=U+b \tag{29}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Sigma k_1\frac{\partial}{\partial k_2}+\alpha+\nu(k_1^2+k_2^2)+ik_2a+ik_1(U+b)+\frac{a}{R}k_2\frac{\partial}{k_1}\right)\mathcal{G}(t,\mathbf{k},\mathbf{q})=(2\pi)^2\delta(t)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \tag{30}$$

$$\begin{cases} k_1=q_2\frac{a}{R}t+q_1(1-\frac{t^2}{2}\frac{a\Sigma}{R}) \\ k_2=q_2-\Sigma t q_1-q_2\frac{a\Sigma}{2R}t^2+\frac{q_1}{6}\frac{\Sigma^2 a}{R}t^3 \end{cases} \tag{31}$$

Тогда, после интегрирования по времени поправки к корреляторам:
Для $< u_r u_\varphi >$:

$$-\frac{a(p_2^2-2p_1^2)}{Rp_1^2\Sigma^2(p_1^2+p_2^2)} \tag{32}$$

Для $< u_r u_r >$:

$$\frac{ap_1p_2^2(2(p_1^2+p_2^2)\operatorname{arctg}\frac{p_1}{p_2}+p_1(\pi p_1+2p_2)+\pi p_2^2)}{3R(p_1^7+p_1^5p_2^2)} \tag{33}$$

Для $< u_\varphi u_\varphi >$:

$$-\frac{a}{3Rp_1^2\Sigma}\left(\frac{3}{\nu\Sigma^2p_1^2}\right)\Gamma(\frac{4}{3}) \tag{34}$$