Когерентный вихрь в условиях слабой неоднородности

Двумерная гидродинамика

Уравнение Навье-Стокса:

$$(\partial_t + v_j\partial_j)v_i = -\partial_i p - \alpha v_i + \nu\partial_j\partial_j v_i$$

Уравнение на завихренность $\varpi = curl\ v$:

$$\partial_t\varpi + (\mathbf{v}\nabla)\varpi = curl\ f + \nu\nabla^2\varpi - \alpha\varpi$$

С условием несжимаемости $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0$. Уравнение на давление:

$$\partial_i\partial_i p = -\partial_i v_j\partial_j v_i$$

Уравнения Навье-Стокса

С учетом несжимаемости:

$$\partial_r(rv_r) + \partial_\varphi v_\varphi = 0$$

Уравнения Навье-Стокса в полярных координатах:

$$\begin{cases} \partial_t v_r + \alpha v_r + \frac{1}{r}(v_r^2 - v_\varphi^2) + (\partial_r v_r^2 + \frac{1}{r}\partial_\varphi(v_r v_\varphi)) + \partial_r p = 0 \\ \partial_t v_\varphi + \alpha v_\varphi + \frac{2}{r}(v_r v_\varphi) + (\partial_r(v_r v_\varphi) + \frac{1}{r}\partial_\varphi v_\varphi^2) + \frac{1}{r}\partial_\varphi p = 0 \end{cases}$$

Уравнение на давление:

$$-\nabla^2 p = \frac{1}{2}(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r)v_r^2 + (\frac{1}{2r^2}\partial_\varphi^2 + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi - \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2})v_\varphi^2 + \frac{1}{r}\partial_r\partial_\varphi v_r v_\varphi$$

Когерентный вихрь

Разделим поле скоростей на флуктурирующую и усредненную часть:

$$\begin{cases} v_r = u_r \\ v_\varphi = u_\varphi + U \end{cases}$$

Полярная компонента уравнения Навье-Стокса:

$$\alpha v_\varphi + \frac{2}{r}(v_r v_\varphi) + (\partial_r (v_r v_\varphi) + \frac{1}{r}\partial_\varphi v_\varphi^2) + \frac{1}{r}\partial_\varphi p = 0$$

$$\alpha U + (\partial_r + \frac{2}{r})\langle u_r u_\varphi \rangle = 0$$

Когерентный вихрь

Усредняя по времени уравнения Навье-Стокса, с учетом изотропности, для полярной компоненты:

$$\alpha U = -(\partial_r + \frac{2}{r})\langle u_r u_\varphi \rangle$$

Для коррелятора:

$$\langle u_r u_\varphi \rangle = \frac{\epsilon}{\Sigma}$$

- где ϵ - мощность силы на единицу массы, $\Sigma = \partial_r U - \frac{U}{r}$.

Стационарное вихревое решение:

$$U = \sqrt{\frac{3\epsilon}{\alpha}}$$

Слабая неоднородность

Для уравнений Навье-Стокса в полярных координатах, с неизотропным возмущением коэффициента:

$$\alpha \to \alpha + \delta\alpha = \alpha + Ar\cos\varphi$$

Предполагая решение локализованным с характерным размером R:

$$\delta\alpha = AR\cos\varphi \ll \alpha$$

Усреднение по флуктуациям

Поле скоростей из двух компонент: флуктурирующей и усредненной по времени части, будем искать поправку к усредненной части в виде первых гармоник по углу w_i:

$$\begin{cases} v_r = w_r + u_r \\ v_\varphi = U + w_\varphi + u_\varphi \end{cases}$$

Вводя тензор для флуктурирующих скоростей:

$$\Pi_{ij} = \langle u_i u_j \rangle$$

Подстановка для первой гармоники

Для α выполняется условие $\alpha \ll \Sigma$, тогда подстановка

$$w_r = a\cos\varphi \quad w_\varphi = b\sin\varphi$$

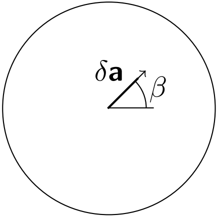
$$\Pi_{\varphi\varphi} = c\sin\varphi \quad \Pi_{rr} = d\sin\varphi \quad \Pi_{r\varphi} = \frac{\epsilon}{\Sigma} + e\cos\varphi$$

Подставляя в уравнения с учетом малости α, получаем итоговую систему уравнений на гармоники:

$$\begin{cases} \frac{-U(2b+a)}{r} + d' + \frac{d}{r} - \frac{c+e}{r} = 0 \\ U(A + \frac{2}{r}a + a' + \frac{2}{r}b) + (\frac{2}{r}e + e') + \frac{c}{r} = 0 \\ a + ra' + b = 0 \end{cases}$$

Сдвиговая мода

При перемещении центра вихря на малый вектор $\delta\mathbf{a}$:



$$w_r = -U\frac{\delta a}{r}\sin(\varphi - \beta) = -U\frac{\delta a}{r}\sin\varphi\cos\beta + U\frac{\delta a}{r}\cos\varphi\sin\beta$$

$$w_\varphi = U\cos\alpha - U = 0$$

Полученная подстановка $w_r = a\cos\varphi$ допускает дрейф вихря как целого только в перпендикулярном неоднородности направлении.

Статистика накачивающей силы

Для случайной силы накачки примем ее коротко коррелированной по времени и однородной по пространству:

$$\langle f_i(t_1,\mathbf{x}) f_j(t_2,\mathbf{y})\rangle = \epsilon \delta_{ij} \delta(t_1 - t_2) \Xi(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

Обратное преобразование Фурье для коррелятора завихренности:

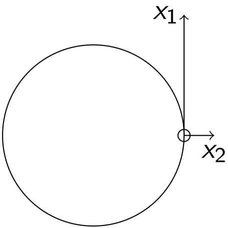
$$\langle \varpi(t,\mathbf{x}) \varpi(0,\mathbf{y})\rangle = \int \frac{d^2k d^2q}{(2\pi)^4} \exp(i\mathbf{kx} + i\mathbf{qy}) \mathcal{F}(t,\mathbf{k},\mathbf{q})$$

Связь $\mathcal{F}(t,\mathbf{k},\mathbf{q})$ и Гриновской функции [1]:

$$\mathcal{F}(t,\mathbf{k},\mathbf{q}) = 2\epsilon \int d\tau \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \mathbf{p}^2 \tilde{\Xi}(\mathbf{p}) \mathcal{G}(t+\tau,\mathbf{k},\mathbf{p}) \mathcal{G}(\tau,\mathbf{q},-\mathbf{p})$$

Сдвиговое течение

В приближении сдвигового течения вблизи полярного угла $\varphi = 0$:



$$w_r = a\cos\varphi = a$$

$$w_\varphi = U + b\sin\varphi = U + b\frac{x_1}{R}$$

Связь волновых векторов

Для функции Грина:

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \Sigma x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha - \nu\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2}\Big) + a\frac{\partial}{\partial x_2} +$$

$$+ \Big(U + \frac{b x_1}{R}\Big)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)\mathcal{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

После преобразования Фурье:

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \Sigma k_1 \frac{\partial}{\partial k_2} + \alpha + \nu(k_1^2 + k_2^2) + ik_2 a +$$

$$+ik_1 U - \frac{b}{R}k_1\frac{\partial}{k_1}\Big)\mathcal{G}(t, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = (2\pi)^2\delta(t)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$$

Оставляя только первый порядок в разложении по b для импульсов:

$$\begin{cases} k_1 = q_1(1 - \frac{b}{R}t) \\ k_2 = q_2 - q_1\Sigma t + \frac{q_1 b \Sigma}{2R}t^2 \end{cases}$$

В итоге, для функции Грина:

$$\mathcal{G}(t,\mathbf{k},\mathbf{q}) = (2\pi)^2\delta(k_1-q_1(1-\frac{b}{R}t))\delta(k_2-q_2+q_1\Sigma t-q_1\frac{b\Sigma}{2R}t^2)\theta(t)G(t,\mathbf{q})$$

$$G(t,\mathbf{q}) = \exp\left(-\alpha t - \Lambda_1(\mathbf{q}) - \Lambda_2(\mathbf{q})\right)$$

- где $\Lambda_1(\mathbf{q})$ - выражение, линейное по компонентам $\mathbf{q}$, $\Lambda_2(\mathbf{q})$ - квадратичное.

$$\mathcal{F}(t,\mathbf{k},q) = 2\epsilon\int d\tau\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}p^2\tilde{\Xi}(\mathbf{p})\mathcal{G}(t+\tau,\mathbf{k},\mathbf{p})\mathcal{G}(\tau,\mathbf{q},-\mathbf{p})$$

Сингулярная часть $\mathcal{F}$:

$$\delta(k_1-p_1(1-\frac{b}{R}(t+\tau)))\delta(k_2-p_2+p_1\Sigma(t+\tau)-p_1\frac{b\Sigma}{2R}(t+\tau)^2)$$

$$\delta(q_1+p_1(1-\frac{b}{R}\tau))\delta(q_2+p_2+p_1\Sigma\tau-p_1\frac{b\Sigma}{2R}\tau^2)$$

Нахождение поправок к тензору Рейнольдса

Так как для для поля скоростей с условием $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0$ можно ввести функцию ψ:

$$\begin{cases} v_1 = \partial_1 \psi \to i k_1 \psi \\ v_2 = -\partial_2 \psi \to -i k_2 \psi \end{cases}$$

и завихренность $\varpi = -\nabla^2 \psi \to \mathbf{k^2} \psi$, Тогда для коррелятора скоростей:

$$\langle u_r(0, \mathbf{0}) u_\varphi(0, \mathbf{0}) \rangle = \int d\tau \int \frac{d^2 p d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{k_1 q_2}{k^2 q^2} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}) G(\tau, \mathbf{p})^2$$

Нахождение поправок к тензору Рейнольдса

В итоге получаем поправку:

$$\frac{b}{2R}\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\tilde{\Xi}(\mathbf{p})\mathbf{p}^2\frac{1}{p_1\Sigma^2}\left(\frac{\pi}{2|p_1|}+\frac{p_1}{p_1^2+p_2^2}+\frac{\operatorname{arctg}(\frac{p_2}{p_1})}{p_1}\right)$$

И аналогично, находим поправки к другим компонентам: для $< u_r(\mathbf{0},0)u_r(\mathbf{0},0) >$

$$\frac{b}{2R}\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\tilde{\Xi}(\mathbf{p})\mathbf{p}^2\frac{p^2}{p_1^2\Sigma^2}\frac{\frac{p_1^3}{p_1^2+p_2^2}-\pi p_2 p_1-2p_2\operatorname{arctg}\frac{p_2}{p_1}+2p_1}{p_1^3}$$

Для $< u_\varphi(\mathbf{0},0)u_\varphi(\mathbf{0},0) >$:

$$\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\tilde{\Xi}(\mathbf{p})\mathbf{p}^2\frac{2b}{3Rp_1^2\Sigma^2}\ln\frac{\Sigma}{\nu p_1\sqrt{p_1^2+p_2^2}}$$