1 Маятник с вязким трением

Постановка задачи

Мы рассматриваем движение вязкого маятника, оно описывается следующим уравнением:
$$\ddot{\theta} = -2\gamma\dot{\theta} + \omega^2 \sin\theta + f(t)\cos\theta, \tag{1}$$
где θ – угол отклонения от верхнего положения, ω – частота маятника, γ – коэффициент вязкости, $f(t)$ – гауссов шум с коррелятором

$$\langle f(t_1) f(t_2)\rangle = 2\alpha\delta(t_1 - t_2). \tag{2}$$

Нас будут интересовать траектории, которые все время находятся в верхней полуплоскости, т.е. $-\pi/2 < \theta(t) < \pi/2$ при любых t; такие траектории будем называть никогда не падающими траекториями (ННПТ). Т.к. точно решить уравнение (1) для произвольной силы нельзя, мы будем изучать усредненные по реализации шума характеристики.

В этой части подход к решению задачи аналогичен [1] и [2], где был рассмотрен маятник без трения.

Линеаризованный случай

Допустим, что шум мал, из-за чего характерные углы отклонения маятника также малы (условие, при котором шум можно считать малым, получим позднее). Тогда уравнение (1) можно линеаризовать:

$$\ddot{\theta} = -2\gamma\dot{\theta} + \omega^2\theta + f(t). \tag{3}$$

Его решение можно записать через функции Грина:

$$\theta(t) = \int_{t'=-\infty}^{t'=\infty} G(t-t') f(t') dt',$$

где функция Грина $G(\tau)$ выбирается так, чтобы она затухала при $t \to \pm\infty$.

$$G(\tau) = -\frac{\exp\left(-\gamma\tau\right)}{2\Omega} \exp\left(-\Omega|\tau|\right),$$

где введено обозначение
$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \gamma^2}.$$

Найдем среднюю функцию распределения $P(\theta, p)$ угла θ и импульса $p = \dot{\theta}$ в некоторый момент времени, для определенности $t = 0$; для этого усредним функцию распределения при некоторой реализации шума:

$$P(\theta, p) = \langle \delta\left(\theta - \theta(0)\right) \delta\left(p - p(0)\right)\rangle.$$

Представим дельта-функции в интегральном виде:

$$P(\theta, p) = \left\langle \iint\limits_{k,k'\in\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi}\frac{dk'}{2\pi} \exp\left[ik\left(\theta(0) - \theta\right) + ik'\left(p(0) - p\right)\right] \right\rangle.$$

В полученном выражении от шума зависит лишь $\exp\left[ik\theta(0)+ik'p(0)\right]$, причем функция под экспонентой зависит линейно от $f(t)$. Тогда для ее среднего верно следующее соотношение:

$$\left\langle \exp\left[ik\theta(0)+ik'p(0)\right]\right\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\left\langle\left(k\theta(0)+k'p(0)\right)^2\right\rangle\right].$$

Усредняя слагаемые вида $\theta^2(0)$, $p^2(0)$ и $\theta(0)p(0)$ и выполняя оставшееся интегрирование, находим функцию распределения:

$$P(\theta,p) = \frac{\omega\Omega}{\pi\alpha}\exp\left(-\frac{\omega^2\Omega}{\alpha}\theta^2 - \frac{\Omega}{\alpha}p^2\right). \tag{4}$$

Мы видим, что характерные значения углов $\theta \sim \sqrt{\frac{\alpha}{\omega^2\Omega}}$, т.е. условие малости шума записывается как

$$\alpha \ll \omega^2\Omega.$$

Заметим, что при увеличении вязкости γ характерные углы отклонения уменьшаются, а также для любого значения α при достаточно больших γ шум можно считать слабым.

Общий случай

Вернемся к рассмотрению общего случая. Обозначим через $\varphi(t)$ ННПТ, соответствующую некоторой реализации шума $f(t)$. Значение некоторого функционала A от этой траектории можно представить в виде

$$A[\varphi] = \int D\theta\,\delta\left(\theta-\varphi\right)A[\theta],$$

причем интегрирование будем производить лишь по функциям лежащим в полосе $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Тогда функция φ является единственным[1] решением уравнения $\partial_t^2\theta + 2\gamma\partial_t\theta = F(\theta,t) \equiv \omega^2\sin\theta + f\cos\theta$, поэтому мы можем заменить аргумент дельта-функции на $\partial_t^2\theta + 2\gamma\partial_t\theta - F$:

$$A[\varphi] = \int D\theta\,\delta\left(\partial_t^2\theta + 2\gamma\partial_t\theta - F\right)\left|\det\left(\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t - F'\right)\right| A[\theta],$$

где штрихом обозначено дифференцирование по θ.

Представим дельта-функцию в виде интеграла, вводя дополнительное поле λ; также перепишем детерминант через интеграл от экспоненты, вводя дополнительные грассмановы поля χ и $\overline{\chi}$:

$$A[\varphi] = \int D\theta D\lambda D\chi D\overline{\chi}\exp\left[i\lambda\left(\partial_t^2\theta + 2\gamma\partial_t\theta - F(\theta)\right) + \overline{\chi}\left(\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t - F'(\theta)\right)\chi\right] A[\theta].$$

Снова используя при усреднении формулу $\langle\exp(x)\rangle = \exp\left(\frac{1}{2}\left\langle x^2\right\rangle\right)$, придем к выражению

$$\left\langle A[\varphi]\right\rangle = \int D\theta D\lambda D\chi D\overline{\chi}\,A[\theta]\,e^{S_{\text{эфф}}},$$

где

$$S_{\text{эфф}} = \int dt\left[-i\dot{\lambda}\dot{\theta} - \dot{\overline{\chi}}\dot{\chi} + 2i\gamma\lambda\dot{\theta} + 2\gamma\overline{\chi}\dot{\chi} - U\right],$$

$$U = i\lambda\omega^2\sin\theta + \omega^2\cos\theta\overline{\chi}\chi + \alpha\left(\lambda^2\cos^2\theta + 2i\lambda\cos\theta\sin\theta\overline{\chi}\chi\right).$$

[1]Единственность решения можно показать так же, как и в случае маятника без трения.

Переход к ψ

Перейдем от функциональных интегралов к волновой функции $\hat{\Psi}(\theta, \lambda, \chi, \overline{\chi}, t)$. Ее компоненты разложения по грассмановым полям обозначим следующим образом:

$$\hat{\Psi}(\theta, \lambda, \chi, \overline{\chi}, t) = \Psi(\theta, \lambda, t) + \Phi(\theta, \lambda, t)\overline{\chi}\chi.$$

Изменение $\hat{\Psi}$ за время dt дается выражением

$$\hat{\Psi}(\theta, \lambda, \chi, \overline{\chi}, t + dt) = \int d\theta' d\lambda' d\chi' d\overline{\chi}' e^{\Delta S} \Psi(\theta', \lambda', \chi', \overline{\chi}', t),$$

где ΔS – приращение действия за время dt при переходе из точки со штрихованными координатами в рассматриваемую точку. Это уравнение приводит к системе

$$\begin{aligned}
\partial_t \Psi &= \left(-i\partial_\theta \partial_\lambda - 2\gamma\lambda\partial_\lambda - U_1\right) \Psi - \Phi, \\
\partial_t \Phi &= -U_2 \Psi + \left(-i\partial_\theta \partial_\lambda - 2\gamma\lambda\partial_\lambda - U_1 - 2\gamma\right) \Phi,
\end{aligned}$$

где U_1 и U_2 – компоненты потенциала $U = U_1 + U_2 \overline{\chi}\chi$.

Как и в задаче без трения, из-за наличия симметрии Ψ и Φ можно выразить через одну функцию ψ:

$$\Psi = i\lambda\psi, \quad \Phi = \partial_\theta \psi.$$

Подстановка этих выражений в предыдущую систему даст два эквивалентных уравнения:

$$\partial_t \psi = \Big(-i\partial_\theta \partial_\lambda - 2\gamma \left(1 + \lambda\partial_\lambda\right) - U_1\Big) \psi.$$

Нас интересует лишь нулевая мода, т.к. остальные экспоненциально затухают. После подстановки выражения для потенциала, для нулевой моды имеем следующее уравнение:

$$\Big(i\partial_\theta \partial_\lambda + 2\gamma \left(1 + \lambda\partial_\lambda\right) + i\lambda\omega^2 \sin\theta + \alpha\lambda^2 \cos^2\theta\Big) \psi = 0.$$

После преобразования Фурье

$$\psi(\theta, p) = \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-ip\lambda} \psi(\theta, \lambda)$$

уравнение запишется как

$$\Big(p\partial_\theta + 2\gamma p\partial_p + \omega^2 \sin\theta \partial_p + \alpha \cos^2\theta \partial_p^2\Big) \psi = 0.$$

Чтобы выбор знаков совпадал с выбором знаков в [1] (он отличается из-за различия знаков в аргументе дельта-функции), сделаем замену $p \to -p$:

$$\Big(p\partial_\theta - 2\gamma p\partial_p + \omega^2 \sin\theta \partial_p - \alpha \cos^2\theta \partial_p^2\Big) \psi = 0. \tag{5}$$

Как и в задаче без трения, распределение вероятности выражается через скобку Пуассона $\psi(\theta, p)$, соответствующей не падающей траектории, идущей из $t = -\infty$ до t, и $\psi(\theta, p)$, соответствующей не падающей траектории от $t + dt$ до $+\infty$, однако теперь для получения обратной функции из прямой недостаточно сменить знак импульса. Действительно, выражение для обратной функции можно получить из выражения для прямой функции, поменяв направление времени $t \to -t$. Но при такой замене слагаемое $\gamma\dot{\theta}$ меняет знак, поэтому в выражении для обратной функции вязкость должна фигурировать с обратным знаком. В итоге,

$$P(\theta) = \Big\{\psi(\theta, p; \gamma)\psi(\theta, -p; -\gamma)\Big\}. \tag{6}$$

Граничные условия на ψ те же, что и в задаче без трения ($\psi(\pi/2, p < 0) = -1/2$, $\psi(-\pi/2, p > 0) = 1/2$).

Решение в случае малого шума

При малых $\alpha \ll \sqrt[3]{\omega^2\Omega}$ мы можем линеаризовать (5):

$$\left(p\partial_\theta - 2\gamma p\partial_p + \omega^2\theta\partial_p - \alpha\partial_p^2\right)\psi = 0.$$

Решение можно найти в виде функции ошибок, оно равно

$$\psi = \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left[\frac{\gamma+\Omega}{2\alpha}\left(p - (\Omega-\gamma)\,\theta\right)\right].$$

Подстановка в (6) дает

$$P(\theta,p) = \frac{\omega\Omega}{\pi\alpha}\exp\left(-\frac{\omega^2\Omega}{\alpha}\theta^2 - \frac{\Omega}{\alpha}p^2\right), \tag{7}$$

что совпадает с полученным ранее (4).

Случай отсутствия инерции и гравитации

Можно формально рассмотреть случай движения частицы без массы, это соответствует опусканию члена $p\partial_\theta$ в (5). При этом из этого уравнения нельзя будет найти ψ, т.к. оно перестает содержать информацию о $\partial_\theta\psi$, а граничные условия заданы лишь для двух углов $\theta = \pm\pi/2$. В связи с этим вернемся к уравнению движения (1), оно перепишется как

$$\dot\theta = \frac{\omega^2\sin\theta + f(t)\cos\theta}{2\gamma}.$$

При нулевой массе и ненулевой гравитации ($\omega \neq 0$) нарушается существование ННПТ, поэтому далее рассматриваем случай $\omega = 0$. Переходя к переменной

$$\xi = \ln\tan\frac{\theta+\pi/2}{2},$$

получим

$$\dot\xi = \frac{f(t)}{2\gamma},$$

т.е. частица совершает броуновское движение. Если частица стартует из $\theta = 0$ при $t = 0$, то распределение вероятности через время t будет равно

$$P_\xi(\xi) = \frac{2\gamma^2}{\sqrt{2\pi\alpha t}}\exp\left(-\frac{\gamma^2\xi^2}{\alpha t}\right),$$

а в начальных координатах

$$P_\theta(\theta) = \frac{1}{\cos\theta}P_\xi\left(\xi\left(\theta\right)\right).$$

При $t \to \infty$ дисперсия $\sigma_\xi \to \infty$, и плотность вероятности P_θ сконцентрирована у краев $\theta = \pm\pi/2$. Заметим, что в этом случае вязкость также имеет стабилизирующее действие, т.к. при $\gamma = 0$ ННПТ вообще не существует (в случае $m = 0$, $\omega = 0$).

2 Произвольная система уравнений первого порядка

Постановка задачи

Уравнение (5) похоже на уравнение Фоккера-Планка, а его можно записать для системы дифференциальных уравнений первого порядка, не обязательно полученных из уравнений второго порядка. В связи с этим, рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\partial_t \theta_i = h_i(\theta, t) + \sigma_{in}(\theta, t)\xi_n,$$

где θ_i – набор N координат, h_i – вектор дрейфа, не зависящий от шума, ξ_n – гауссов шум с коррелятором

$$\left\langle \xi_i(t_1)\xi_k(t_2) \right\rangle = 2\alpha\delta_{ik}\delta(t_1 - t_2),$$

σ_{in} – коэффициенты перед шумом.

Заметим, что размерность вектора ξ, вообще говоря, не совпадает с количеством координат θ (так, в одномерном маятнике есть две координаты (угол и импульс) и лишь один шум). Однако мы можем ввести фиктивные бесконечно малые шумы, поэтому в дальнейшем будем считать, что индекс n в ξ_n пробегает те же значения, что и индексы у других величин (т.е. от 1 до N).

Будем считать, что выбрана некоторая область, разрешенная для ННПТ (в случае одномерного маятника это было множество $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, $-\infty < p < \infty$), и имеет место существование и единственность ННПТ.

Эффективное действие и переход к волновой функции

При сделанных выше предположениях мы можем ввести дополнительные поля λ_i, χ_i и $\overline{\chi}_i$, аналогично одномерному маятнику. При этом будет иметь место уравнение (1) (в котором под $D\lambda$ подразумевается $D\lambda_1 D\lambda_2 \ldots D\lambda_n$, и аналогично для других полей) с новым эффективным действием:

$$S_{\text{эфф}} = \int dt \left[i\lambda_l \left(\partial_t\theta_l - h_l\right) + \overline{\chi}_i \left(\delta_{ik}\partial_t - \frac{\partial h_i}{\partial \theta_k}\right)\chi_k + \right.$$
$$\left. + \alpha \left(-\lambda_i\lambda_k\sigma_{ij}\sigma_{kj} + 2i\lambda_i\sigma_{ij}\frac{\partial \sigma_{mj}}{\partial \theta_k}\overline{\chi}_m\chi_k + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta_k}\frac{\partial \sigma_{i'j}}{\partial \theta_{k'}}\overline{\chi}_i\chi_k\overline{\chi}_{i'}\chi_{k'} \right) \right].$$

Отметим, что в предыдущей задаче действие содержало член $-i\partial_t\lambda\partial_t\theta$, поэтому действие на малом времени Δt при перемещении на $\Delta\theta$, $\Delta\lambda$ содержало член $i\frac{\Delta\theta\,\Delta\lambda}{\Delta t}$. При переходе к волновой функции это означало, что интеграл по $\Delta\lambda$ и $\Delta\theta$ набирается на малых отклонениях, и $\Psi(\theta, \lambda)$ можно было раскладывать в ряд. Сейчас же действие содержит лишь члены с одной производной по времени, и вывода о малости $\Delta\lambda$ или $\Delta\theta$ сделать нельзя, поэтому сразу переходить к волновой функции не получится.

Однако мы видим, что эффективный лагранжиан зависит квадратично от λ, поэтому мы можем взять функциональный интеграл по $D\lambda$. Это приводит к следующему выражению для волновой функции:

$$\Psi = \int D\theta D\chi D\overline{\chi} \frac{1}{\sqrt{\det\left(\alpha d_{ik}\right)}} \cdot$$
$$\cdot \exp\left\{ \int dt \left[\overline{\chi_i} \left(\delta_{ik}\partial_t - \frac{\partial h_i}{\partial \theta_k} - \sigma^{-1}_{nj} \frac{\partial \sigma_{in}}{\partial \theta_k} \left(\partial_t \theta_j - h_j\right) \right) \chi_k - \frac{1}{4\alpha} d^{-1}_{ij} \left(\partial_t \theta_i - h_i\right) \left(\partial_t \theta_j - h_j\right) \right] \right\}, \tag{8}$$

где

$$d_{ik} = \sigma_{in}\sigma_{kn}.$$

Если количество независимых шумов меньше количества координат N, то матрица d вырождена и ее детерминант равен нулю (или бесконечно мал, если добавить малые шумы). Однако впоследствии он сократится, поэтому к проблемам это не приводит.

Теперь подынтегральная функция содержит член $\frac{d^{-1}_{ij}}{4\alpha}\partial_t\theta_i\partial_t\theta_j$, содержащий две первых производных, и мы можем перейти к уравнению на эволюцию Ψ стандартным образом:

$$\Psi(\theta, \chi, \overline{\chi}, t+\varepsilon) = \int d\theta' d\chi' d\overline{\chi}' \frac{1}{\sqrt{\det\left(\varepsilon\alpha d_{ik}\right)}} e^{\Delta S} \Psi(\theta', \chi', \overline{\chi}', t),$$

где под ΔS подразумевается приращение подэкспоненциального интеграла в (8).

После интегрирования по θ' получим

$$\Psi(t+\varepsilon) = \left(1 - \varepsilon \frac{\partial h_i}{\partial \theta_k} \overline{\chi_i}\chi_k\right) \exp\left[\overline{\chi_k}\chi_k\right] \int d\chi' d\overline{\chi}' \exp\left[-\overline{\chi_k}\chi'_k\right] \cdot$$
$$\left[\Psi'\left(\theta, t\right) + \alpha\varepsilon \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \theta_k} \frac{\partial \sigma_{qn}}{\partial \theta_p} \overline{\chi_m}\chi_k \overline{\chi}_q \chi_p \Psi'\left(\theta, t\right) + \varepsilon \left(2\alpha\sigma_{ln} \frac{\partial \sigma_{in}}{\partial \theta_k} \overline{\chi_i}\chi_k - h_l\right) \partial_l \Psi'\left(\theta, t\right) + \alpha\varepsilon d_{lr} \partial_l \partial_r \Psi'\left(\theta, t\right)\right],$$

где штрихом обозначена зависимость от штрихованных χ' и $\overline{\chi}'$.

Переходя к новой переменной ψ через

$$\Psi(\theta, \chi, \overline{\chi}, t) = \exp\left(\overline{\chi}_k \chi_k\right) \psi(\theta, \chi, \overline{\chi}, t)$$

и обозначая через I оператор

$$I = \int d\chi' d\overline{\chi}' \exp\left(-\overline{\chi_k}\chi'_k\right) \exp\left(\overline{\chi}'_k \chi'_k\right),$$

получим

$$\psi(t+dt) =$$
$$= \left(1 - \varepsilon \frac{\partial h_{i'}}{\partial \theta_{k'}} \overline{\chi}_{i'}\chi_{k'}\right) I \left[\psi + \alpha\varepsilon \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \theta_k} \frac{\partial \sigma_{qn}}{\partial \theta_p} \overline{\chi}_m \chi_k \overline{\chi}_q \chi_p \psi + \varepsilon \left(2\alpha\sigma_{ln} \frac{\partial \sigma_{in}}{\partial \theta_k} \overline{\chi}_i \chi_k - h_l\right) \partial_l \psi + \alpha\varepsilon d_{lr} \partial_l \partial_r \psi\right]. \tag{9}$$

Если требовать, чтобы в ψ входили лишь слагаемые с одинаковым количеством сопряженных и не сопряженных грассмановых полей (т.е. вида $x = \chi_{i_1}\chi_{i_2}\ldots\chi_{i_n}\overline{\chi}_{j_1}\overline{\chi}_{j_2}\ldots\overline{\chi}_{j_n}$), то $I[x] = \pm 1$, если множества индексов i совпадает с множеством индексов j (в некотором порядке), причем в каждом множестве нет повторений; $I[x] = 0$ иначе.

Тогда в нулевом порядке ($dt = 0$) получаем, что ψ является числом (без грассмановых полей). В общем случае уравнение получается несогласованным: производная

$\partial_t\psi$ должна быть числом, но в правой части возникает член $\frac{\partial h_{i'}}{\partial\theta_{k'}}\overline{\chi}_{i'}\chi_{k'}$. Если потребовать $\partial_k h_i = 0$ (т.е. $h_i = $ const), то уравнение будет согласованным, а уравнение будет иметь вид

$$-h_l\partial_l\psi + \alpha\left[\frac{\partial\sigma_{kn}}{\partial\theta_k}\frac{\partial\sigma_{pn}}{\partial\theta_p} - \frac{\partial\sigma_{pn}}{\partial\theta_q}\frac{\partial\sigma_{qn}}{\partial\theta_p} + 2\sigma_{ln}\frac{\partial\sigma_{kn}}{\partial\theta_k}\partial_l + \sigma_{ln}\sigma_{rn}\partial_l\partial_r\right]\psi = 0.$$

Список литературы

[1] *«Флуктуационная проводимость и плотность состояний в низкоразмерных сверхпроводниках», кандидатская диссертация Н.А. Степанова*. `https://www.itp.ac.ru/ru/dissertation-council/thesis/fulltexts/2020-stepanovi-disser.pdf`.

[2] M.A. Skvortsov N.A. Stepanov. *Inverted pendulum driven by a horizontal random force: statistics of the never-falling trajectory and supersymmetry*. Т. 13. 2. 2022.