Никогда не падающая траектория вязкого маятника

Автор: Князев Матвей
Руководитель: Степанов Николай

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение движения вязкого маятника:

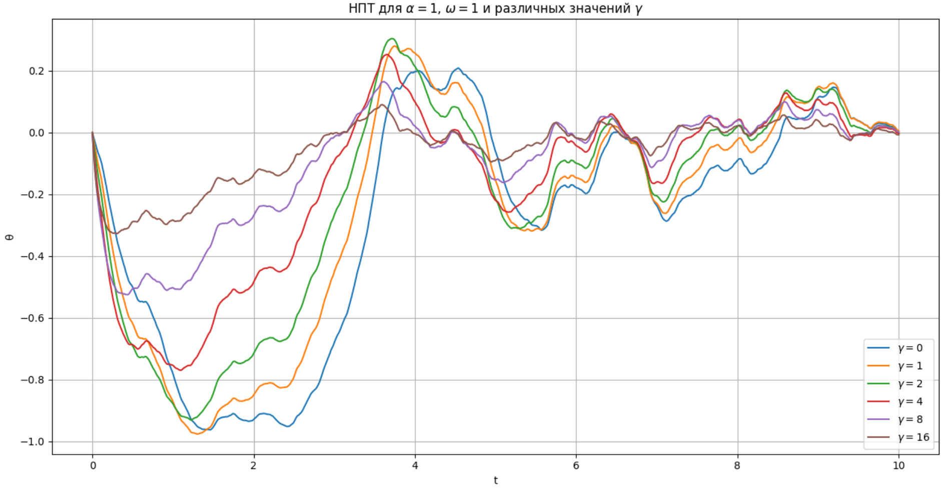
$$\ddot{\theta} = -2\gamma\dot{\theta} + \omega^2 \sin\theta + f(t)\cos\theta,$$

- θ – угол отклонения маятника
- ω – частота маятника
- γ – коэффициент вязкости
- $f(t)$ – случайная сила, которая распределена по Гауссу и коррелятор которой имеет вид

$$\langle f(t_1) f(t_2)\rangle = 2\alpha\delta(t_1 - t_2).$$

Нас будут интересовать траектории, у которых угол θ всегда лежит в промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$ (никогда не падающие траектории).
Точно решить уравнение нельзя, поэтому мы будем искать некоторые усредненные (по шуму) характеристики.

НПТ при различных значениях вязкости



Линеаризованный случай

В случае малых шумов можно ожидать, что отклонение траектории от положения равновесия будет мало, тогда уравнение движения можно линеаризовать:

$$\ddot{\theta} = -2\gamma\dot{\theta} + \omega^2\theta + f(t).$$

В этом случае решение можно записать явно, используя функцию Грина G:

$$\theta(t) = \int_{t'=-\infty}^{t'=\infty} G(t-t')f(t')dt',$$

где функция Грина выбирается убывающей в обе стороны:

$$G(\tau) = -\frac{\exp\left(-\gamma\tau\right)}{2\Omega}\exp\left(-\Omega|t|\right),$$

где введено обозначение

$$\Omega = \sqrt{\omega^2+\gamma^2}.$$

Линеаризованный случай

Найдем функцию распределения $P(\theta, p)$ угла θ и импульса $p \equiv \dot{\theta}$ в момент времени $t = 0$:

$$P(\theta, p) = \langle \delta \left(\theta - \theta(0) \right) \left(p - p(0) \right) \rangle.$$

Используем интегральное представление дельта-функции:

$$\delta(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}.$$

В итоге от шума будет зависеть лишь выражение вида $\exp \left(A[f] \right)$ с линейным функционалом A, и его можно усреднить, используя приведенную ранее формулу.
После всех вычислений и взятий интегралов получаем

$$P(\theta, p) = \frac{\omega \Omega}{\pi \alpha} \exp \left(-\frac{\omega^2 \Omega}{\alpha} \theta^2 - \frac{\Omega}{\alpha} p^2 \right).$$

Полезные факты

Пусть вектор x распределен по Гауссу с нулевым средним и его компоненты независимы, а функция f линейно зависит от x. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\langle \exp\left(f(x)\right)\rangle = \exp\left(\frac{1}{2}\langle f^2(x)\rangle\right),$$

т.е. мы можем относительно легко усреднять экспоненты.
Также мы будем пользоваться грассмановыми числами, которые антикоммутативны ($\chi\eta = -\eta\chi$), причем интеграл для них определен следующим образом:

$$\int d\chi\, 1 = 0, \quad \int d\chi\, \chi = 1.$$

Тогда для произвольной матрицы A будет выполняться

$$\det A = \int d\chi_1 d\overline{\chi_1} \dots d\chi_n d\overline{\chi_n}\, \exp\left(\overline{\chi}_i A_{ik} \chi_k\right).$$

Функциональный интеграл

Мы будем пользоваться функциональным интегралом. Интегрирование по функциям можно рассматривать как предел интегралов следующего вида:

$$\int Dx\, F[x(t)] = \lim_{\varepsilon \to 0} k\,(\varepsilon) \int_{x_1} \cdots \int_{x_n} dx_1 \ldots dx_n F[\tilde{x}(t)],$$

где $\tilde{x}$ – кусочно-линейная функция, принимающая значения x_i в момент времени t_i, $k(\varepsilon)$ – нормировочный множитель, зависящий от мелкости разбиения.

Общий метод

Рассмотрим конкретную реализацию шума $f(t)$ и обозначим через $\varphi(t)$ соответствующую ННПТ. Тогда значение какого-либо функционала на этой траектории $A[\varphi]$ можно записать как

$$A[\varphi] = \int D\theta\, \delta\left(\theta - \varphi\right) A[\theta],$$

причем мы будем интегрировать лишь по θ, лежащим в $(-\pi/2, \pi/2)$. Учитывая, что φ является единственным решением уравнения $\vartheta = \partial_t^2\theta - F(\theta, t) = 0$, где $F = -2\gamma\dot{\theta} + \omega^2\theta + f$, мы можем перейти к более понятному аргументу в дельта-функции:

$$A[\varphi] = \int D\theta\, \delta\left(\vartheta\right) \left|\det\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}\right)\right| A[\theta].$$

Т.к. искомая траектория единственна, модуль у детерминанта можно снять, а затем представить дельта-функцию и детерминант в виде экспонент:

$$A[\varphi] = \int D\theta D\lambda D\chi D\overline{\chi} \exp\left[i\lambda\left(\partial_t^2\theta + 2\gamma\partial\theta - F(\theta)\right) + \overline{\chi}\left(\partial_t^2 + 2\gamma\partial - F'(\theta)\right)\right.$$

Эффективное действие

При усреднении функционала по шуму в правой части нужно усреднять лишь часть экспоненты, линейно зависящую от f:

$$\langle A[\varphi]\rangle = \int D\xi \exp\left[i\lambda\left(\partial_t^2\theta - F_c(\theta)\right) + \overline{\chi}\left(\partial_t^2 - F_c'(\theta)\right)\chi\right]\cdot \left\langle \exp\left[-i\lambda F_f(\theta) - F_f'(\theta)\overline{\chi}\chi\right]\right\rangle$$

(Под $D\xi$ подразумевается дифференциал всех координат)
Усредняя экспоненту, получим выражение вида

$$\langle A[\varphi]\rangle = \int D\xi e^{S_{\text{эфф}}},$$

где

$$S_{\text{эфф}} = \int dt\left[-i\dot{\lambda}\dot{\theta} - \dot{\overline{\chi}}\dot{\chi} + 2i\gamma\lambda\dot{\theta} + 2\gamma\overline{\chi}\dot{\chi} - U\right],$$

Переход к волновой функции

Введем волновую функцию $\hat{\Psi}$:

$$\hat{\Psi}(\xi, t) = \int_{t_0}^{t} D\xi\, \hat{\Psi}(\xi', t_0) e^{S}.$$

Ее можно разложить на компоненты:
$\hat{\Psi}(\theta, \lambda, \chi, \overline{\chi}, t) = \Psi(\theta, \lambda) + \Phi(\theta, \lambda)\overline{\chi}\chi$.
Мы хотим получить дифференциальное уравнение на волновую функцию, для этого найдем ее изменение за малое время $dt = \varepsilon$:

$$\hat{\Psi}(\xi, t + dt) = \int d\xi'\, \hat{\Psi}(\xi', t) e^{\Delta S}.$$

Отсюда можно получить систему уравнений на Ψ и Φ.

Переход к одной функции

При используемом подходе в задаче есть следующая симметрия: лагранжиан не меняется при замене $\delta\theta = \varepsilon\chi$, $\delta\overline{\chi} = -i\varepsilon\lambda$. Из этой симметрии следует, что между Ψ и Φ имеется связь: они выражаются через одну функцию ψ:

$$\Psi = i\lambda\psi, \quad \Phi = \partial_\theta\psi.$$

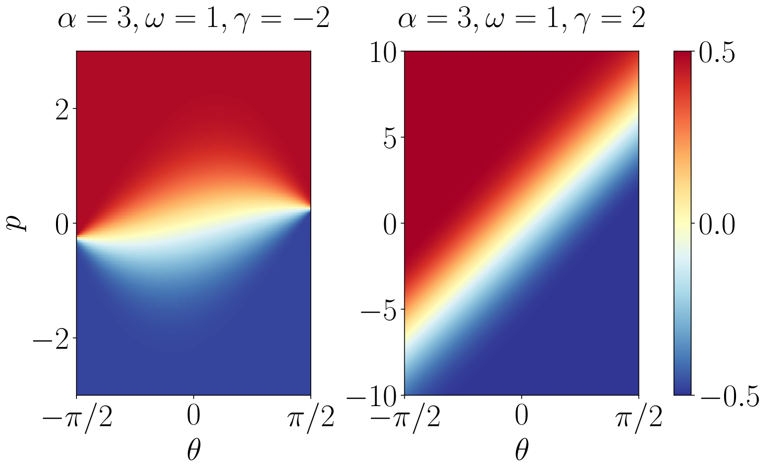
Если эти выражения подставить в предыдущую систему, получатся два уравнения, эквивалентных

$$\left(p\partial_\theta + \omega^2 \sin\theta\partial_p - \alpha\cos^2\theta\partial_p^2 - 2\gamma p\partial_p\right)\psi = 0.$$

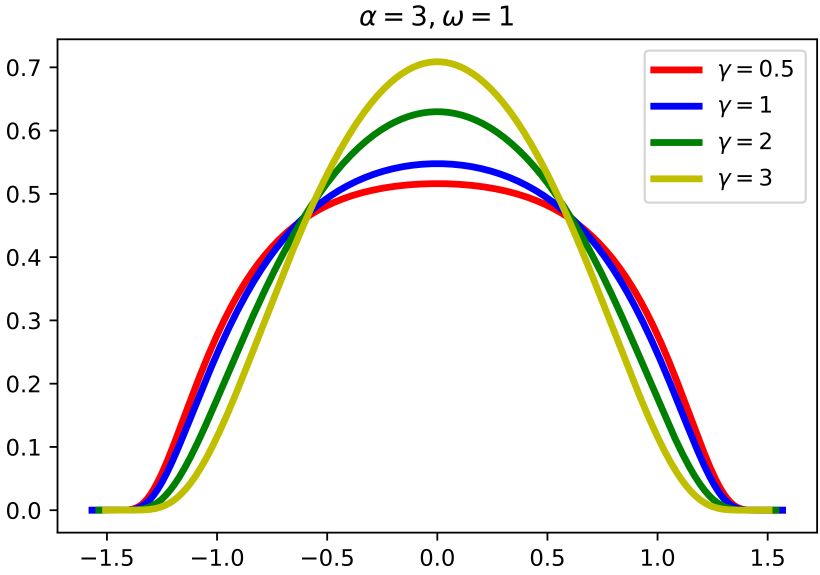
Выражение для плотности вероятности

Для нахождения плотности вероятности во время $(t, t+\varepsilon)$ нужно усреднить $\delta(\theta - \theta(t))$:

$$P(\theta) = \int d\xi \hat{\Psi}_{\text{прямое}}(t)\hat{\Psi}_{\text{обратное}}(t+dt)e^{\Delta S} = \left\{\psi(\theta, p; \gamma)\psi(\theta, -p; -\gamma)\right\}_{\theta,p}.$$



Распределение вероятности от угла $P(\theta)$



Случай малого шума

При малом шуме ($\sqrt[3]{\alpha} \ll \omega, \gamma$) ψ сконцентрировано около малых углов и уравнение можно линеаризовать:

$$\left(p\partial_\theta + \omega^2\theta\partial_p - \alpha\partial_p^2 - 2\gamma p\partial_p\right)\psi = 0.$$

Его решение можно найти в виде функции ошибок:

$$\psi = \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left[\frac{\gamma+\Omega}{2\alpha}\left(p - (\Omega-\gamma)\,\theta\right)\right].$$

Плотность вероятности при этом совпадает с найденной ранее:

$$P(\theta, p) = \frac{\omega\Omega}{\pi\alpha}\exp\left(-\frac{\omega^2\Omega}{\alpha}\theta^2 - \frac{\Omega}{\alpha}p^2\right).$$

Случай отсутствия инерции

Если частица обладает нулевой массой и гравитация отсутствует (т.е. γ, $\sqrt[3]{\alpha} \gg 1$, $\omega = 0$), то уравнение движения имеет вид

$$\dot{\theta} = \frac{f \cos\theta}{2\gamma}.$$

Переходя к переменной $\xi = \ln \frac{\theta + \pi/2}{2}$, получим

$$\dot{\xi} = \frac{f(t)}{2\gamma},$$

т.е. в этих координатах частица совершает броуновское движение, и распределение вероятности равно

$$P_\xi(\xi) = \frac{2\gamma^2}{\sqrt{2\pi\alpha t}} \exp\left(-\frac{\gamma^2\xi^2}{\alpha t}\right).$$

В начальных координатах имеем

$$P_\theta(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} P_\xi\left(\xi\left(\theta\right)\right).$$

Более общая задача

Можно рассмотреть произвольную систему уравнений первого порядка вида

$$\partial_t \theta_i = h_i(\theta) + \sigma_{ik}(\theta)\xi_k,$$

где ξ_k – гауссовы шумы, h – вектор дрейфа, σ – коэффициенты перед шумами.

Вводя снова дополнительные обычные и грассмановы поля (но в два раза больше), а также интегрируя сразу по λ до перехода к волновой функции, можно получить уравнение на $\hat{\Psi}$. Оно сводится к уравнению на одну функцию, если решение искать в виде $\hat{\Psi}(\theta, \chi, \overline{\chi}) = \psi(\theta) \exp\left(\overline{\chi}_k \chi_k\right)$, а уравнение на ψ имеет вид, похожий на Фоккера-Планка:

$$-h_l \partial_l \psi + \alpha \left[\frac{\partial \sigma_{kn}}{\partial \theta_k} \frac{\partial \sigma_{pn}}{\partial \theta_p} - \frac{\partial \sigma_{pn}}{\partial \theta_q} \frac{\partial \sigma_{qn}}{\partial \theta_p} + 2\sigma_{ln} \frac{\partial \sigma_{kn}}{\partial \theta_k} \partial_l + \sigma_{ln}\sigma_{rn}\partial_l\partial_r \right] \psi = 0.$$

Однако при этом возникают некоторые дополнительные требования на h.

В некоторых случаях, например, для системы с лагранжианом вида $L = \frac{1}{2} p_k p_k - U(x)$, это уравнение совпадает с уравнением Фоккера-Планка.