Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере: статистические свойства гауссовых начальных пучков

Харавинин Влад

Мы исследуем статистику нулей интенсивности лазерного луча при его распространении в турбулентной атмосфере. Все характерные масштабы задачи (размер волнового пакета, длина его распространения) предполагаются значительно превышающими длину волны, так что применимо описание волны в терминах комплекной огибающей Ψ. В силу большого значения скорости света можно считать, что состояние среды не меняется за время распространения волны и использовать стационарное приближение для описания её огибающей, т.е. считать Ψ функцией координаты z в направлении распространения волны, и двумерного радиус вектора $\mathbf{r}$ в плоскости, перпендикулярной направлению распространения.

Тогда уравнение для огибающей $\Psi(\mathbf{r},z)$ имеет вид

$$i\partial_z\Psi + \nabla_\perp^2\Psi + \xi\Psi = 0, \tag{1}$$

где $\nabla_\perp$ - двумерный градиент в поперечной к направлению распространения плоскости, а $\xi(\mathbf{r},z)$ - флуктуирующая составляющая показателя преломления.

Расстояние, пройденное волной, предполагается существенно превышающим интегральный масштаб турбулентности, тогда как поперечный размер волнового пакета предполагается меньшим, чем интегральный масштаб. В этом случае показатель преломления ξ быстро флуктуирует вдоль направления распространения волны. Нас интересуют интегральные характеристики, связанные с ξ, поэтому в силу центральной предельной теоремы статистика ξ может считаться гауссовой. Эта статистика определяется парной корреляционной функцией флуктуаций показателя преломления:

$$\langle\xi(\mathbf{r}_1,z_1)\xi(\mathbf{r}_2,z_2)\rangle = \delta(z_1-z_2)\left[const - r_{12}^c\right], \tag{2}$$

где угловые скобки означают усреднение по реализациям состояния среды, $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ и c - некоторое число. Выражение (2) справедливо для расстояний r_{12}, лежащих в инерционном интервале турбулентности. Константа в соотношении (2) определяется турбулентными флуктуациями на интегральном масштабе, а степенная поправка - флуктуациями на масштабах $\sim r_{12}$. Флуктуациями показателя преломления ξ в турбулентной атмосфере определяются в основном флуктуациями давления. Для колмогоровсого спектра показатель степени c в выражении (2) равен $c = \frac{5}{3}$. В дальнейшем показатель c будет считаться произвольным числом, лежащим в интервале $1 < c < 2$.

Для двуточечной корреляционной функции имеется представление в виде свертки с фунцией грина $\mathcal{G}$.

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,z) = \frac{1}{16\pi^2z^2}exp\left[\frac{i}{2z}\left(\mathbf{x}-\mathbf{r}\right)\left(\mathbf{X}-\mathbf{R}\right) - z\int_0^1 d\chi|\mathbf{x}\chi + (1-\chi)\mathbf{r}|^c\right], \tag{3}$$

где $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{X} = \frac{\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2}{2}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$

$$\langle\Psi(\mathbf{r}_2,z)\Psi^*(\mathbf{r}_1,z)\rangle = \int d^2\mathbf{X}d^2\mathbf{x}\mathcal{G}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,z)\Psi_{in}(\mathbf{x}_1,z)\Psi^*_{in}(\mathbf{x}_2,z) \tag{4}$$

Нас интересует среднее число нулей интенсивности как функция области интегрирования:

$$\langle N\rangle = \langle \int dxdy\delta(u(x,y))\delta(v(x,y))|u'_x v'_y - u'_y v'_x|\rangle, \qquad (5)$$

где введены обозначения $u = Re\,[\Psi]\,, v = Im\,[\Psi]$

Пользуясь интегральным представлением δ-функции Дирака

$$\delta(x) = \int \frac{dp}{2\pi} exp(ipx)$$

и преобразованием Хаббарда-Стратановича

$$\frac{1}{|u'_x v'_y - u'_y v'_x|} = \int \frac{d\tau}{\sqrt{\pi}} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{4\pi\tau^2}} exp\left[-\frac{\zeta^2}{4\tau^2} - i\zeta\left(u'_x v'_y - u'_y v'_x\right)\right]$$

получим:

$$\langle N\rangle = \int dxdy \int \frac{dp}{2\pi}\frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\tau}{\sqrt{\pi}} \frac{d\zeta}{\sqrt{4\pi\tau^2}} (\frac{1}{2\tau^2} - \frac{\zeta^2}{4\tau^4}) exp\left[-\frac{\zeta^2}{4\tau^2}\right] \langle exp\left[ipu + ikv - i\zeta\left(u'_x v'_y - u'_y v'_x\right)\right]\rangle \qquad (6)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u, & v, & u'_x, & u'_y, & v'_x, & v'_y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} ip, & ik, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \langle u^2\rangle & \langle uv\rangle & \langle uu'_x\rangle & \langle uu'_y\rangle & \langle uv'_x\rangle & \langle uv'_y\rangle \\ \langle vu\rangle & \langle v^2\rangle & \langle vu'_x\rangle & \langle vu'_y\rangle & \langle vv'_x\rangle & \langle vv'_y\rangle \\ \langle u'_x u\rangle & \langle u'_x v\rangle & \langle u'^2_x\rangle & \langle u'_x u'_y\rangle & \langle u'_x v'_x\rangle & \langle u'_x v'_y\rangle \\ \langle u'_y u\rangle & \langle u'_y v\rangle & \langle u'_y u'_x\rangle & \langle u'^2_y\rangle & \langle u'_y v'_x\rangle & \langle u'_y v'_y\rangle \\ \langle v'_x u\rangle & \langle v'_x v\rangle & \langle v'_x u'_x\rangle & \langle v'_x u'_y\rangle & \langle v'^2_x\rangle & \langle v'_x v'_y\rangle \\ \langle v'_y u\rangle & \langle v'_y v\rangle & \langle v'_y u'_x\rangle & \langle v'_y u'_y\rangle & \langle v'_y v'_x\rangle & \langle v'^2_y\rangle \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i\zeta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом

$$\langle exp\left[ipu + ikv - i\zeta\left(u'_x v'_y - u'_y v'_x\right)\right]\rangle = \int d\mathbf{u} exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{u}M\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{u}N\mathbf{u} + \mathbf{b}\mathbf{u}\right] \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{det(M^{-1})}} \qquad (7)$$

$$\langle exp\left[ipu + ikv - i\zeta\left(u'_x v'_y - u'_y v'_x\right)\right]\rangle = \frac{exp\left[\frac{1}{2}\mathbf{b}(M+N)^{-1}\mathbf{b}\right]}{\sqrt{det(\mathbf{1} + NM^{-1})}} = \frac{exp\left[\frac{1}{2}\mathbf{b}M^{-1}(\mathbf{1} + NM^{-1})^{-1}\mathbf{b}\right]}{\sqrt{det(\mathbf{1} + NM^{-1})}} \qquad (8)$$

$$
\mathbf{1}+NM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2i\zeta\langle u'_y u\rangle & -2i\zeta\langle u'_y v\rangle & -2i\zeta\langle u'_y u'_x\rangle & -2i\zeta\langle u'^2_y\rangle & 1-2i\zeta\langle u'_y v'_x\rangle & -2i\zeta\langle u'_y v'_y\rangle \\ 2i\zeta\langle u'_x u\rangle & 2i\zeta\langle u'_x v\rangle & 2i\zeta\langle u'^2_x\rangle & 2i\zeta\langle u'_x u'_y\rangle & 2i\zeta\langle u'_x v'_x\rangle & 1+2i\zeta\langle u'_x v'_y\rangle \end{pmatrix}
$$

$$
det\left(\mathbf{1}+NM^{-1}\right) = 1+2i\zeta\langle u'_x v'_y - u'_y v'_x\rangle + 4\zeta^2\left[\langle u'_y v'_x\rangle\langle u'_x v'_y\rangle - \langle u'_y v'_y\rangle\langle u'_x v'_x\rangle\right] \tag{9}
$$

Пользуясь соотношениями:

$$
\langle u^2\rangle \; = \langle v^2\rangle = \frac{1}{2}\langle\Psi\Psi^*\rangle
$$

$$
\langle u'_x u\rangle = \langle v'_x v\rangle = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}\langle\Psi\Psi^*\rangle
$$

$$
\langle u'_y u\rangle = \langle v'_y v\rangle = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial y}\langle\Psi\Psi^*\rangle
$$

$$
\langle uv\rangle = \langle u'_x v'_x\rangle = \langle u'_y v'_y\rangle = 0
$$

$$
\langle u'_x v\rangle = -\langle v'_x u\rangle = \frac{1}{4i}\langle\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\rangle
$$

$$
\langle u'_y v\rangle = -\langle v'_y u\rangle = \frac{1}{4i}\langle\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial y} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial y}\rangle
$$

$$
\langle u'_y v'_x\rangle = -\langle v'_y u'_x\rangle = \frac{1}{4i}\langle\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi^*}{\partial y} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\rangle
$$

$$
\langle u'_y v'_x\rangle\langle u'_x v'_y\rangle - \langle u'_y v'_y\rangle\langle u'_x v'_x\rangle = \frac{1}{16}\langle\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi^*}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\rangle^2
$$

$$
\langle u'_y v\rangle\langle v'_x v\rangle - \langle u'_x v\rangle\langle v'_y v\rangle = \frac{1}{8i}\left(\langle\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\rangle\langle\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial y}\rangle - \langle\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\rangle\langle\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial y}\rangle\right)
$$

Получим:

$$
det\left(\mathbf{1}+NM^{-1}\right) = \left(1-\frac{\zeta}{2}\langle\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi^*}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\rangle\right)^2 \tag{10}
$$

$$
exp\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}(M+N)^{-1}\mathbf{b}\right) =
$$

$$
= -\frac{(p^2+k^2)}{2}\left(\langle u^2\rangle + 2i\zeta\frac{\langle u'_y v\rangle\langle v'_x v\rangle - \langle u'_x v\rangle\langle v'_y v\rangle}{det(\mathbf{1}+NM^{-1})} + (2i\zeta)^2\langle u'_x v'_y\rangle\frac{\langle u'_y v\rangle\langle v'_x v\rangle - \langle u'_x v\rangle\langle v'_y v\rangle}{det(\mathbf{1}+NM^{-1})}\right) \tag{11}
$$

Полагаем $\langle \frac{\partial\Psi(\mathbf{R})}{\partial R_1}\frac{\partial\Psi^*(\mathbf{R})}{\partial R_2}\rangle = \lim_{\mathbf{R}'\to\mathbf{R}}\partial_{R_1}\partial_{R_2'}\langle\Psi(\mathbf{R})\Psi^*(\mathbf{R}')\rangle$

$$\langle\frac{\partial\Psi(\mathbf{R})}{\partial R_1}\frac{\partial\Psi^*(\mathbf{R})}{\partial R_2}-\frac{\partial\Psi(\mathbf{R})}{\partial R_2}\frac{\partial\Psi^*(\mathbf{R})}{\partial R_1}\rangle = \lim_{\mathbf{R}'\to\mathbf{R}}\int d^2\mathbf{X}d^2\mathbf{x}\left(\frac{\partial^2\mathcal{G}}{\partial R_1\partial R_2'}-\frac{\partial^2\mathcal{G}}{\partial R_2\partial R_1'}\right)\Psi_{in}(\mathbf{X}+\frac{\mathbf{x}}{2})\Psi_{in}^*(\mathbf{X}-\frac{\mathbf{x}}{2})$$

$$\mathcal{G}=exp(f(\mathbf{R},\mathbf{R}')),\quad \left(\frac{\partial^2\mathcal{G}}{\partial R_1\partial R_2'}-\frac{\partial^2\mathcal{G}}{\partial R_2\partial R_1'}\right)=\mathcal{G}\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial R_1}\frac{\partial f}{\partial R_2'}-\frac{\partial f}{\partial R_2}\frac{\partial f}{\partial R_1'}+\frac{\partial^2 f}{\partial R_1\partial R_2'}-\frac{\partial^2 f}{\partial R_2\partial R_1'}\right]$$

$$\lim_{\mathbf{R}'\to\mathbf{R}}\frac{\partial f}{\partial R_1}\frac{\partial f}{\partial R_2'}-\frac{\partial f}{\partial R_2}\frac{\partial f}{\partial R_1'}=[\left(\frac{i}{2z}(-X_1-\frac{x_1}{2}+R_1)+\frac{2zx_2}{1+c}|\mathbf{x}|^{c-2}\right)\left(\frac{i}{2z}(X_2-\frac{x_2}{2}-R_2)-\frac{2zx_2}{1+c}|\mathbf{x}|^{c-2}\right)-$$

$$-\left(\frac{i}{2z}(-X_2-\frac{x_2}{2}+R_2)+\frac{2zx_1}{1+c}|\mathbf{x}|^{c-2}\right)\left(\frac{i}{2z}(X_1-\frac{x_1}{2}-R_1)-\frac{2zx_1}{1+c}|\mathbf{x}|^{c-2}\right)]$$

$$\lim_{\mathbf{R}'\to\mathbf{R}}\frac{\partial f}{\partial R_1}\frac{\partial f}{\partial R_2'}-\frac{\partial f}{\partial R_2}\frac{\partial f}{\partial R_1'}=\frac{1}{4z^2}\left[x_1\left(X_2-R_2\right)-x_2\left(X_1-R_1\right)\right]$$

$$\lim_{\mathbf{R}'\to\mathbf{R}}\frac{\partial^2 f}{\partial R_1\partial R_2'}-\frac{\partial^2 f}{\partial R_2\partial R_1'}=-z\int_0^1 d\chi(4\chi(1-\chi))^2\chi^{c-4}|\mathbf{x}|^{c-4}x_1x_2+z\int_0^1 d\chi(4\chi(1-\chi))^2\chi^{c-4}|\mathbf{x}|^{c-4}x_2x_1=0$$

$$\langle\frac{\partial\Psi}{\partial R_1}\frac{\partial\Psi^*}{\partial R_2}-\frac{\partial\Psi}{\partial R_2}\frac{\partial\Psi^*}{\partial R_1}\rangle=$$

$$=\int\frac{d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{X}}{16\pi^2z^2}\frac{x_1(X_2-R_2)-x_2(X_1-R_1)}{4z^2}exp\left[-\frac{i}{2z}\mathbf{x}\mathbf{R}+\frac{i}{2z}\mathbf{x}\mathbf{X}-\frac{z|\mathbf{x}|^c}{1+c}\right]\Psi_{in}(\mathbf{X}+\frac{\mathbf{x}}{2})\Psi_{in}^*(\mathbf{X}-\frac{\mathbf{x}}{2}) \tag{12}$$

Для $\Psi_{in}(\mathbf{R})$, таких что $\Psi_{in}(\mathbf{X}+\frac{\mathbf{x}}{2})\Psi_{in}^*(\mathbf{X}-\frac{\mathbf{x}}{2})=f(|\mathbf{X}|)g(|\mathbf{x}|)$ верно:

$$\langle\frac{\partial\Psi}{\partial R_1}\frac{\partial\Psi^*}{\partial R_2}-\frac{\partial\Psi}{\partial R_2}\frac{\partial\Psi^*}{\partial R_1}\rangle=0$$

$$\langle\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial R_1}\rangle\langle\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial R_2}\rangle-\langle\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial R_1}\rangle\langle\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial R_2}\rangle=$$

$$=\lim_{\mathbf{R}'\to\mathbf{R}}\left(\int d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{X}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial R_1}\Psi_{in}\Psi_{in}^*\int d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{X}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial R_2'}\Psi_{in}\Psi_{in}^*-\int d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{X}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial R_2}\Psi_{in}\Psi_{in}^*\int d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{X}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial R_1'}\Psi_{in}\Psi_{in}^*\right)$$

Сокращая совпадающие слагаемые, получим:

$$=\int d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{X}\mathcal{G}x_1\Psi_{in}\Psi_{in}^*\int d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{X}\mathcal{G}(X_2-R_2)\Psi_{in}\Psi_{in}^*-\int d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{X}\mathcal{G}x_2\Psi_{in}\Psi_{in}^*\int d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{X}\mathcal{G}(X_1-R_1)\Psi_{in}\Psi_{in}^* \tag{13}$$

Аналогично, для $\Psi_{in}(\mathbf{R})$, таких что $\Psi_{in}(\mathbf{X}+\frac{\mathbf{x}}{2})\Psi_{in}^*(\mathbf{X}-\frac{\mathbf{x}}{2})=f(|\mathbf{X}|)g(|\mathbf{x}|)$ верно:

$$\langle\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial R_1}\rangle\langle\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial R_2}\rangle-\langle\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial R_1}\rangle\langle\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial R_2}\rangle=0$$

Таким образом, для $\Psi_{in}(\mathbf{y}) = exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right]$:

$$det\left(\mathbf{1} + NM^{-1}\right) = 1$$

$$exp\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}(M+N)^{-1}\mathbf{b}\right) = -\frac{1}{2}\left(p^2+k^2\right)\langle u^2\rangle$$

$$\langle N\rangle = \int dxdy\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\langle u^2\rangle|}\int\frac{d\tau}{\sqrt{\pi}}\frac{d\zeta}{\sqrt{4\pi\tau^2}}(\frac{1}{2\tau^2}-\frac{\zeta^2}{4\tau^4})exp\left[-\frac{\zeta^2}{4\tau^2}\right] = 0$$

В результате мы получили, что любая огибающая волнового пакета, с радиально симметричным в плоскости перпендикулярной направлению распространения профилем, после прохождения сквозь турбулентную атмосферу не будет иметь нулей.