Летняя школа по теоретической физике 2023

Распространение пучка в турбулентной атмосфере: статистические свойства гауссовых начальных пучков

Отчет о проделанной работе

Докладчик:

Харавинин Владислав

Руководитель:

Колоколов Игорь Валентинович

Черноголовка, 17-29 августа

«Упражнение для пальцев»

- Постановка задачи:

$$\langle N(t_0)\rangle_\xi = \langle \int_0^{t_0} dt\delta(x(t))|\dot{x}(t)|\rangle_\xi,$$

$$\text{где } x(t) = x_0(t) + \int_0^t d\tau \mathcal{G}(t-\tau)\xi(\tau),$$

$\mathcal{G}$ – функция Грина уравнения движения x(t) ,

$\xi(t)$ – случайная сила, $\langle \xi(t_1)\xi(t_2)\rangle = 2\alpha\delta(t_1 - t_2)$

«Упражнение для пальцев»

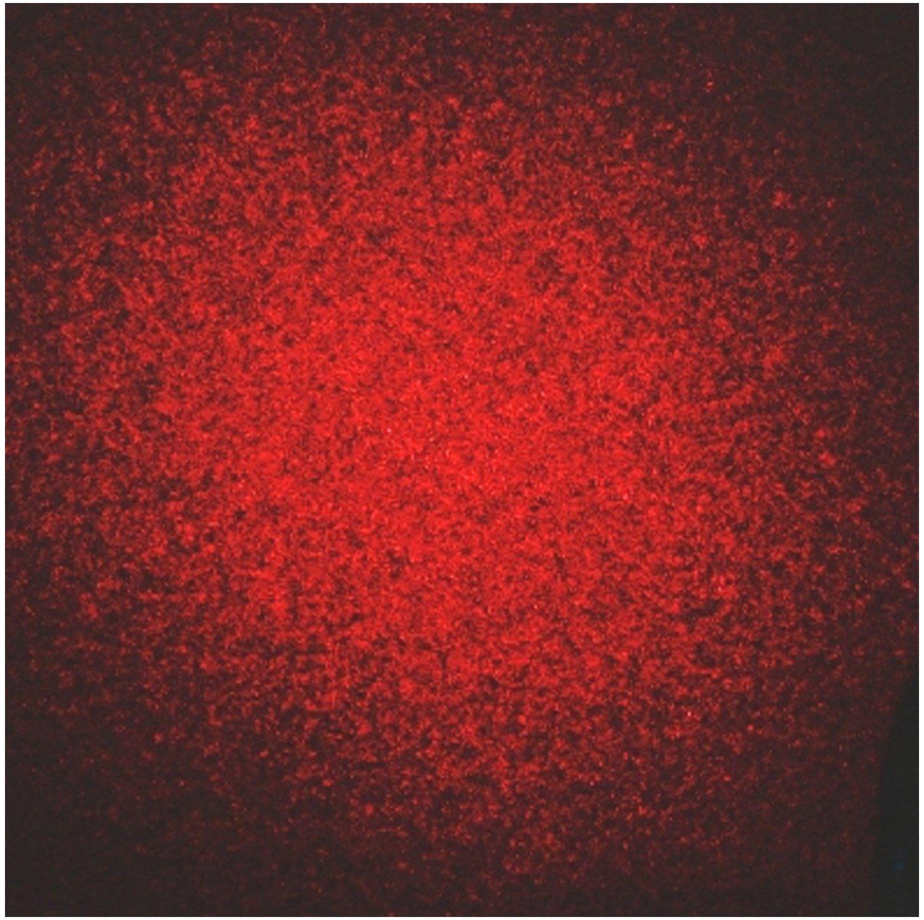
- Результаты:

$$\text{на малых временах } \langle N \rangle_\xi \sim -\frac{1}{3} ln\left(\frac{x_0^2(0)}{\alpha}\right)$$

$$\text{для броуновской частицы с трением при } t \gg 1 \quad \langle N \rangle_\xi \sim \sqrt{t}$$

$$\text{для осцилятора с трением при } t \gg 1 \quad \langle N \rangle_\xi \sim t$$

Актуальность задачи



Постановка задачи

$$E(\mathbf{r},t) = Re\left[\Psi(\mathbf{r},t)exp(-i\omega t + i\mathbf{kr})\right]$$

$$i\partial_z\Psi + \nabla_\perp^2\Psi + \xi\Psi = 0$$

$$\langle\xi(\mathbf{r}_1,z_1)\xi(\mathbf{r}_2,z_2)\rangle = \delta(z_1 - z_2)\left[const - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^c\right], \quad 1 < c < 2$$

$$\langle N\rangle = \langle\int dxdy\, \delta(u(x,y))\, \delta(v(x,y))\, |u'_x v'_y - u'_y v'_x|,\rangle$$

$$u = Re\left[\Psi\right] \quad v = Im\left[\Psi\right]$$

$$\langle\Psi(\mathbf{r}_1,z)\Psi^*(\mathbf{r}_2,z)\rangle = \int d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{X}\mathcal{G}\Psi_{in}(\mathbf{x}_1)\Psi^*_{in}(\mathbf{x}_2)$$

Результаты

$$\langle N\rangle = \int dxdy \int \frac{dp}{2\pi}\frac{dk}{2\pi}\int \frac{d\tau}{\sqrt{\pi}}\frac{d\zeta}{\sqrt{4\pi\tau^2}}(\frac{1}{2\tau^2} - \frac{\zeta^2}{4\tau^4})exp\left[-\frac{\zeta^2}{4\tau^2}\right]\frac{exp\left[\frac{1}{2}\mathbf{b}(M+N)^{-1}\mathbf{b}\right]}{\sqrt{det(\mathbf{1}+NM^{-1})}}$$

$$det\left(\mathbf{1}+NM^{-1}\right) = 1 + 2i\zeta\langle u_x'v_y' - u_y'v_x'\rangle + 4\zeta^2\left[\langle u_y'v_x'\rangle\langle u_x'v_y'\rangle - \langle u_y'v_y'\rangle\langle u_x'v_x'\rangle\right]$$

$$exp\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}(M+N)^{-1}\mathbf{b}\right) =$$

$$= -\frac{(p^2+k^2)}{2}\left(\langle u^2\rangle + 2i\zeta\frac{\langle u_y'v\rangle\langle v_x'v\rangle - \langle u_x'v\rangle\langle v_y'v\rangle}{det(\mathbf{1}+NM^{-1})} + (2i\zeta)^2\langle u_x'v_y'\rangle\frac{\langle u_y'v\rangle\langle v_x'v\rangle - \langle u_x'v\rangle\langle v_y'v\rangle}{det(\mathbf{1}+NM^{-1})}\right)$$

$$\langle\frac{\partial\Psi}{\partial R_1}\frac{\partial\Psi^*}{\partial R_2} - \frac{\partial\Psi}{\partial R_2}\frac{\partial\Psi^*}{\partial R_1}\rangle =$$

$$= \int \frac{d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{X}}{16\pi^2z^2}\frac{x_1(X_2-R_2) - x_2(X_1-R_1)}{4z^2}exp\left[-\frac{i}{2z}\mathbf{xR} + \frac{i}{2z}\mathbf{xX} - \frac{z|\mathbf{x}|^c}{1+c}\right]\Psi_{in}(\mathbf{X}+\frac{\mathbf{x}}{2})\Psi^*_{in}(\mathbf{X}-\frac{\mathbf{x}}{2})$$

$$\langle\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial R_1}\rangle\langle\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial R_2}\rangle - \langle\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial R_1}\rangle\langle\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial R_2}\rangle =$$

$$= \int d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{X}\mathcal{G}x_1\Psi_{in}\Psi^*_{in}\int d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{X}\mathcal{G}(X_2-R_2)\Psi_{in}\Psi^*_{in} - \int d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{X}\mathcal{G}x_2\Psi_{in}\Psi^*_{in}\int d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{X}\mathcal{G}(X_1-R_1)\Psi_{in}\Psi^*_{in}$$

Результаты

Для $\Psi_{in}(\mathbf{R})$, таких что $\Psi_{in}(\mathbf{X}+\frac{\mathrm{x}}{2})\Psi^*_{in}(\mathbf{X}-\frac{\mathrm{x}}{2}) = f(|\mathbf{X}|)g(|\mathbf{x}|)$ верно:

$$\langle \frac{\partial \Psi}{\partial R_1}\frac{\partial \Psi^*}{\partial R_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial R_2}\frac{\partial \Psi^*}{\partial R_1}\rangle = 0$$

Аналогично, для $\Psi_{in}(\mathbf{R})$, таких что $\Psi_{in}(\mathbf{X}+\frac{\mathrm{x}}{2})\Psi^*_{in}(\mathbf{X}-\frac{\mathrm{x}}{2}) = f(|\mathbf{X}|)g(|\mathbf{x}|)$ верно:

$$\langle \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial R_1}\rangle\langle \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial R_2}\rangle - \langle \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial R_1}\rangle\langle \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial R_2}\rangle = 0$$

Таким образом, для $\Psi_{in}(\mathbf{y}) = exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right]$:

$$det\left(\mathbf{1} + NM^{-1}\right) = 1$$

$$exp\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}(M+N)^{-1}\mathbf{b}\right) = -\frac{1}{2}\left(p^2+k^2\right)\langle u^2\rangle$$

$$\langle N\rangle = \int dxdy \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\langle u^2\rangle|}\int \frac{d\tau}{\sqrt{\pi}}\frac{d\zeta}{\sqrt{4\pi\tau^2}}\left(\frac{1}{2\tau^2} - \frac{\zeta^2}{4\tau^4}\right)exp\left[-\frac{\zeta^2}{4\tau^2}\right] = 0$$

В итоге мы получили, что любая огибающая волнового пакета, с радиально симметричным в плоскости перпендикулярной направлению распространения профилем, после прохождения сквозь турбулентную атмосферу не будет иметь нулей.