Связь между инстантонной статистической суммой в 4d SUSY калибровочной теории поля и конформным блоком в 2d конформной теории поля.

Г. Тарнопольский

Краткий план доклада

- $4d$ Теория Янга-Миллса.
- $2d$ Конформная теория поля.
- Соответствие Алдая Гаиотто и Тачикавы (АГТ)

Неабелева калибровочная теория Янга-Миллса

• Действие теории в четырехмерном евклидовом пространстве:

$$S_{\mathsf{YM}}[A_\mu] = \frac{1}{2g^2}\int d^4x \mathrm{tr} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu},$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

и вектор-потенциал-матрица:

$$A_\mu = A_\mu^a T^a,$$

где $T^a \in AG$ — алгебра Ли, калибровочной группы G.

• Статистическая сумма теории — функциональный интеграл по всем полям A_μ:

$$Z = \int \prod_{\mu=1}^{4} DA_\mu e^{-\frac{1}{2g^2}\int d^4x \mathrm{tr} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}}$$

Инстантоны в теории Янга-Миллса

• Можно проверить, что следующий интеграл является топологическим инвариантом:

$$q = \frac{1}{8\pi^2} \int d^4x \mathrm{tr} F_{\mu\nu} F^*_{\mu\nu}, \quad q \in \mathbb{Z}$$

и $F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma}$.

• Рассмотрим неравенство

$$\mathrm{tr} \int (F_{\mu\nu} - F^*_{\mu\nu})^2 \geq 0,$$

из которого следует, что

$$S_{\mathrm{YM}}[A_\mu] \geq \frac{4\pi^2}{g^2} |q|$$

• Нижняя граница достигается на **инстантонах** — конфигурациях A_μ, являющихся решением уравнения:

$$F_{\mu\nu} = F^*_{\mu\nu}$$

Инстантонная статистическая сумма в теории Янга-Миллса

- Определим инстантонную статистическую сумму как

$$Z_{\text{инст}} = \int\limits_{F_{\mu\nu}=F^*_{\mu\nu}} \prod_{\mu=1}^{4} DA_\mu e^{-\frac{1}{2g^2}\int d^4x \mathrm{tr} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}}$$

Такой интеграл равен

$$Z_{\text{инст}} = \sum_{q=1}^{\infty} e^{-\frac{4\pi^2}{g^2}q} \int\limits_{\substack{F_{\mu\nu}=F^*_{\mu\nu} \\ \int FF^*=8\pi^2 q}} DA$$

Общее решение уравнения самодуальности. АДХМ конструкция

- Далее считаем, что калибровочная группа $G = SU(2)$

- Уравнение $F_{\mu\nu} = F^*_{\mu\nu}$ имеет решение параметризуемое $8q$ параметрами.

- Вектор потенциал

$$A_\mu = U\partial_\mu U^+$$

и

$$U\Delta^+ = \Delta U^+ = 0, \quad \Delta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & I \\ -B_2^+ & B_1^+ & -J^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & 0 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Описание Дональдсона

$$[B_1, B_2] + IJ = 0 \quad /G \in GL(2)$$

где B_1, B_2 —комплексные матрицы 2×2, I —матрица $2 \times q$ и J —матрица $q \times 2$ и

$$B_{1,2} \to G^{-1} B_{1,2} G, \quad I \to G^{-1} I, \quad J \to JG.$$

Статистическая сумма. Ответ

- Статистическая сумма запишется как ($\vec{Y} = (Y_1, Y_2)$)

$$Z_{\text{инст}} = \sum_{q=1}^{\infty} \Lambda^q \sum_{\{\vec{Y}\}, |\vec{Y}|=q} Z_{\text{вектор}}(\vec{a}, \vec{Y}), \quad \Lambda = e^{-\frac{4\pi^2}{g^2}}.$$

и

$$Z_{\text{вектор}}(\vec{a}, \vec{Y}) = \frac{1}{\prod_{i,j=1}^{2} \prod_{s \in Y_i} E(a_i - a_j, Y_i, Y_j|s)(\epsilon_1 + \epsilon_2 - E(a_i - a_j, Y_i, Y_j))},$$

где $a_1 = -a_2 = a$ и ϵ_1, ϵ_2 — параметры регуляризации,

$$E(a, Y_1, Y_2|s) = a + \epsilon_1(L_{Y_1}(s) + 1) - \epsilon_2 A_{Y_2}(s)$$

- Пример:

$$Z_{\text{вектор}}(\vec{a}, ((1), \varnothing)) = \frac{1}{(2a + \epsilon_1 + \epsilon_2)(-2a)},$$

$$Z_{\text{вектор}}(\vec{a}, (\varnothing, (1))) = \frac{1}{(\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2a)(2a)},$$

Статистическая сумма. Примеры

- Для статистической суммы получаем:

$Z_{\text{инст}} = \Lambda^0(Z_{\text{век}}(\vec{a},(\varnothing,\varnothing)))+\Lambda(Z_{\text{век}}(\vec{a},((1),\varnothing))+Z_{\text{век}}(\vec{a},(\varnothing,(1)))+\ldots$

В итоге

$$Z_{\text{инст}} = 1 + \Lambda\frac{1}{2(\frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)^2}{4}) - a^2)} + \Lambda^2(\ldots) + \ldots$$

$2d$ **Конформная теория поля.**

• Пусть есть двумерная теория с действием $S_{\text{conform}}[\varphi]$, которое является конформно инвариантным.

• В общем случае мы интересуемся корреляционными функциями:

$$\langle O_1(x_1, y_1)...O_n(x_n, y_n)\rangle = \int D\varphi\, O_1(x_1, y_1)...O_n(x_n, y_n)e^{-S_{\text{conform}}[\varphi]}$$

• Удобно работать в координатах:

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

• Есть пространство локальных полей: $\{\mathcal{O}_k(z, \bar{z})\}$, в котором есть базис и любое поле в теории может быть разложено по нему.

• Операторное разложение: $\mathcal{O}_i(z, \bar{z})\mathcal{O}_j(0, 0) = \sum_k C_{ij}^k(z, \bar{z})\mathcal{O}_k(0, 0)$

- В конформной теории след тензора энергии импульса ноль

$$T^{\mu}_{\mu} = 0$$

вместе с уравнением непрерывности $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, это приводит

$$T_{zz} = T(z), \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{T}(\bar{z})$$

- Голоморфная и антиголоморфная части тензора энергии импульса раскладываются по модам:

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}}, \quad \bar{T}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{L}_n}{\bar{z}^{n+2}}$$

- Операторное разложение поля $T(z)$ с полем $\mathcal{O}(w)$

$$T(z)\mathcal{O}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n \mathcal{O}(w)}{(z-w)^{n+2}}$$

• Операторное разложение тензора энергии импульса с собой

$$T(z)T(w) = \frac{c}{2(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + \text{рег.}$$

• Моды тензора энергии импульса являются генераторами алгебры Вирасоро:

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}$$

где c —центральный заряд данной теории.

• Структура в пространстве полей:

$$\{\mathcal{O}_k(z,\bar{z})\} = \bigoplus_n \{\Phi_n,\ L_{-1}\Phi_n,\ L_{-2}\Phi_n,\ L_{-1}^2\Phi_n, ...\} = \bigoplus_n [\Phi_n]$$

• Φ_n — примарное поле, удовлетворяющее

$$L_0\Phi_n = \Delta_n\Phi_n,$$
$$L_k\Phi_n = 0, \quad \text{при} \quad k>0$$
$$\Phi_n(z,\bar{z}) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{\Delta_n}\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{\bar{\Delta}_n}\Phi_n(w,\bar{w})$$

• $\Phi_n^{(-k_1,..,,-k_N)} = L_{-k_1}....L_{-k_N}\Phi_n$ — потомки

• Конформная инвариантность накладывает жесткие ограничение на первые корреляционные функции примарных полей:

$$\langle \Phi_{\Delta}(z) \rangle = 0$$

$$\langle \Phi_{\Delta_1}(z) \Phi_{\Delta_2}(w) \rangle = \frac{\delta_{\Delta_1,\Delta_2}}{(z-w)^{2\Delta_1}},$$

$$\langle \Phi_{\Delta_1}(z_1) \Phi_{\Delta_2}(z_2) \Phi_{\Delta_3}(z_3) \rangle = (z_{12})^{\gamma_3} (z_{13})^{\gamma_2} (z_{23})^{\gamma_1} C_{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3},$$

где $\gamma_i = 2\Delta_i - (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)$.

Операторный формализм

- Запишем для поля стоящего в нуле координат $\Phi_\Delta(0)$:

$$...\Phi_\Delta(0)\rangle = |\Delta\rangle$$

Тогда

$$L_0|\Delta\rangle = \Delta|\Delta\rangle, \quad L_k|\Delta\rangle = 0, \quad k > 0$$

Аналогично для поля в $z \to \infty$

$$\lim_{z\to\infty} z^{2\Delta}\langle\Phi_\Delta(z)... = \langle\Delta|$$

и

$$\langle\Delta|L_0 = \langle\Delta|\Delta, \quad \langle\Delta|L_k = 0, \quad k < 0$$

- Возбужденные состояния записываются как

$$L_{-k_1}...L_{-k_M}|\Delta\rangle = L_{-\boldsymbol{Y}_1}|\Delta\rangle$$

- Очевидно:

$$\langle\Phi_{\Delta_1}(\infty)\Phi_{\Delta_2}(0)\rangle \sim \langle\Delta_1|\Delta_2\rangle = \delta_{\Delta_1,\Delta_2}$$

- Будем рассматривать матричные элементы вида

$$\langle\Phi_{\Delta_1}^{(-m_1,..,-m_N)}(\infty)\Phi_{\Delta_2}^{(-k_1,...,-k_M)}(0)\rangle \sim \langle\Delta|L_{m_1}...L_{m_N}L_{-k_1}...L_{-k_M}|\Delta\rangle$$

Операторный формализм. Примеры

- Вычислим:

$$\langle\Delta|L_1L_{-1}|\Delta\rangle = \langle\Delta|2L_0|\Delta\rangle = 2\Delta$$

Мы использовали коммутационные соотношения в алгебре Вирасоро

$$[L_1, L_{-1}] = 2L_0.$$

- На втором уровне есть следующие матричные элементы

$$\begin{pmatrix} \langle\Delta|L_2L_{-2}|\Delta\rangle & \langle\Delta|L_1^2L_{-2}|\Delta\rangle \\ \langle\Delta|L_2L_{-1}^2|\Delta\rangle & \langle\Delta|L_1^2L_{-1}^2|\Delta\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\Delta + c/2 & 6\Delta \\ 6\Delta & 4\Delta(1+2\Delta) \end{pmatrix}$$

Соответствие Алдая Гаиотты и Тачикавы

- Самое простое АГТ соответствие можно записать как:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k \sum_{(Y_1,Y_2)} Z_{\text{вектор}}(a, Y_1, Y_2) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{\substack{\{\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2\} \\ |\mathbf{Y}_1|=|\mathbf{Y}_2|=k}} \frac{1}{\langle \Delta | L_{\mathbf{Y}_2} L_{-\mathbf{Y}_1} | \Delta \rangle}$$

- На первом уровне получим равенство

$$\Lambda \frac{1}{2(\frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)^2}{4}) - a^2)} = z\frac{1}{2\Delta}$$

параметры и размерности отождествляются как

$$\Lambda = z, \quad \epsilon_1 = b,\ \epsilon_2 = b^{-1}, \quad a = P,$$

здесь Δ параметризовано как

$$\Delta = \frac{Q^2}{4} - P^2, \quad Q = b + b^{-1},$$

а центральный заряд конформной теории равен

$$c = 1 + 6Q^2.$$

Путь к доказательству. Особый базис.

- Добавление к генераторам алгебры Вирасоро L_n, бозонных операторов $a_m, m \neq 0$:

$$[a_n, a_m] = \frac{n}{2}\delta_{n+m,0}, \quad [a_n, L_m] = 0.$$

$$a_n|\Delta\rangle = 0, \quad \text{если} \quad n > 0$$

- Тогда возбужденные состояния есть

$$a_{-m_1}....a_{-m_N}L_{-k_1}...L_{-k_M}|\Delta\rangle = a_{-\boldsymbol{Y}_1}L_{-\boldsymbol{Y}_2}|\Delta\rangle$$

- Поиск особого базиса в таком пространстве состояний:

$$|\Delta\rangle_{\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2} = \sum_{\{\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2\}} C_{\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2} a_{-\boldsymbol{Y}_1}L_{-\boldsymbol{Y}_2}|\Delta\rangle$$

  - Ортогональный

  - Суммарный уровень по $a_{-\boldsymbol{Y}_1}$ и $L_{-\boldsymbol{Y}_2}$ одинаковый $|Y_1| + |Y_2| = k$ для всех слагаемых в этом базисе

  - Норма векторов базиса равна $Z_{\text{вектор}}$:

$${}_{\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2}\langle\Delta|\Delta\rangle_{\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2} = Z_{\text{вектор}}(a, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2)$$

Такой базис существует!

- Примеры на первых уровнях: $\Delta = \frac{Q^2}{4} - P^2$:

- Level 1:

$$|\Delta\rangle_{\{1\},\varnothing} = -(L_{-1} + i(Q + 2P)a_{-1})|\Delta\rangle$$
$$|\Delta\rangle_{\varnothing,\{1\}} = -(L_{-1} + i(Q - 2P)a_{-1})|\Delta\rangle$$

- Level 2:

$$|\Delta\rangle_{\{2\},\varnothing} = (L_{-1}^2 - b^{-1}(Q + 2P)L_{-2} + 2i(Q + b^{-1} + 2P)L_{-1}a_{-1} - \\ - (Q + 2P)(Q + b^{-1} + 2P)a_{-1}^2 - ib^{-1}(Q + 2P)(Q + b^{-1} + 2P)a_{-2})|\Delta\rangle$$

$$|\Delta\rangle_{\{1,1\},\varnothing} = (L_{-1}^2 - b(Q + 2P)L_{-2} + 2i(Q + b + 2P)L_{-1}a_{-1} - \\ - (Q + 2P)(Q + b + 2P)a_{-1}^2 - ib(Q + 2P)(Q + b + 2P)a_{-2})|\Delta\rangle$$

$$|\Delta\rangle_{\{1\},\{1\}} = (L_{-1}^2 - L_{-2} + 2iQL_{-1}a_{-1} + (1 + 4P^2 - Q^2)a_{-1}^2 - iQa_{-2})|\Delta\rangle$$