ИК расходимости в пространстве де Ситтера

Филипп Бурда

ИТЭФ
Москва, Россия

(E.T. Akhmedov, P.B. – ArXiv:hep-th/1202.1202)

ОБЪЕДИНЕННЫЙ МОЛОДЕЖНЫЙ СЕМИНАР ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКЕ
Москва, 1 марта, 2012

Геометрия: Сфера

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = R^2 \quad \left(X_i X_j \delta^{ij} = R^2\right)$$

$$\begin{aligned} X_0 &= R sin\left(\theta\right) sin\left(\phi\right) \\ X_1 &= R cos\left(\theta\right) sin\left(\phi\right) \\ X_2 &= R cos\left(\phi\right) \end{aligned}$$

$$ds^2 = dX_0^2 + dX_1^2 + dX_2^2$$

$$X_i = X_i\left(\theta, \phi\right) \Rightarrow dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial X_i}{\partial \phi} d\phi \Rightarrow$$

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 sin^2\left(\theta\right) d\phi^2$$

Геометрия: Пространство де Ситтера

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 = -1 \quad \left(X_M X_N G^{MN} = -1\right)$$

$$\begin{aligned} X_0 &= \sinh(t) + \frac{1}{2} e^t \left|\vec{x}\right|^2 \\ X_i &= x_i e^t, \quad i = 1, 2, 3 \\ X_4 &= \cosh(t) - \frac{1}{2} e^t \left|\vec{x}\right|^2, \quad -\infty < t, x_i < \infty \end{aligned}$$

$$ds^2 = dX_0^2 - dX_1^2 + dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2, \; X_M = X_M\left(t, x_i\right)$$

$$ds^2 = dt^2 - e^{2t}\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)$$

$$\boxed{ds^2 = \frac{1}{\eta^2}\left(d\eta^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2\right), \; \eta = e^{-t}}$$

КТП: Пространство Минковского

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + m^2\phi^2\right\}, g_{\mu\nu} = \mathsf{diag}(1,-1,-1,-1)$$

$$\left(\Box + m^2\right)\phi(x) = 0$$

$$\phi(t,\vec{x}) = \int d^3p\left(a_p g_p(t)e^{\mathrm{i}\vec{p}\vec{x}} + a_p^+ g_p^*(t)e^{-\mathrm{i}\vec{p}\vec{x}}\right)$$

$$\left[\partial_t^2 + \left(\vec{p}^2 + m^2\right)\right]g_p(t) = 0$$

$$g_p(t) \propto \left\{sin(\omega t), cos(\omega t), e^{\mathrm{i}\omega t}\right\} - ???$$

КТП: Пространство Минковского, Гамильтониан

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x T_{00} = \int d^3x \left[\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right] = \\ &= \int d^3p \left[A_p(t) a_p^+ a_p + B_p(t) a_p a_{-p} + +h.c. \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_p(t) &= |\dot{g}_p|^2 + \left(\vec{p}^2 + m^2 \right) |g_p|^2 \\ B_p(t) &= (\dot{g}_p)^2 + \left(\vec{p}^2 + m^2 \right) (g_p)^2 \end{aligned}$$

$$g_p \propto e^{i\omega t} \Rightarrow B_p(t) \equiv 0$$

КТП: Пространство Минковского, Вакуум

$$g_p = \frac{1}{\sqrt{2w}} e^{\mathrm{i}\omega t}$$

$$H = \int d^3 p w a_p^+ a_p$$

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2w}} \left(a_p e^{\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}\vec{p}\vec{x}} + a_p^+ e^{-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\vec{p}\vec{x}} \right)$$

$$a_p \left| 0 \right\rangle = 0, \forall p$$

КТП: Пространство де Ситтера

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2 \right\}$$

$$ds^2 = \frac{1}{\eta^2} \left(d\eta^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \right)$$

$$\left(\Box(g) + m^2 \right) \phi(x) = 0$$

$$\phi(\eta, \vec{x}) = \int d^3p \left(a_p g_p(\eta) e^{\mathrm{i}\vec{p}\vec{x}} + a_p^+ g_p^*(\eta) e^{-\mathrm{i}\vec{p}\vec{x}} \right)$$

$$\left[\eta^4 \partial_\eta \left(\frac{1}{\eta^2} \partial_\eta \right) - \eta^2 \vec{p}^2 + m^2 \right] g_p(\eta)$$

Какое из решений этого уравнения выбрать???

КТП: Пространство де Ситтера, Гамильтониан

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^{\mu}\phi}\partial_{\nu}\phi - g_{\mu\nu}\Lambda = \partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}$$

$$H = \frac{1}{\eta^2}\int d^3x T_{00} = \int d^3p \left[A_p(\eta)a_p^{+}a_p + B_p(\eta)a_p a_{-p} + h.c.\right]$$

$$A_p(\eta) \;=\; \frac{1}{2\eta^2}\left\{\left|\frac{dg_p}{d\eta}\right|^2 + \left(\vec{p}^2 + \frac{m^2}{\eta^2}\right)|g_p|^2\right\}$$

$$B_p(\eta) \;=\; \frac{1}{2\eta^2}\left\{\left(\frac{dg_p}{d\eta}\right)^2 + \left(\vec{p}^2 + \frac{m^2}{\eta^2}\right)(g_p)^2\right\}$$

КТП: Пространство де Ситтера, Банч-Дэвис

$$g_p(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi\mu}{2}}}{2} \mathcal{H}^{(1)}_{i\,\mu}(p\eta), \quad \mu = \sqrt{m^2 - \frac{9}{4}}$$

В бесконечном прошлом ($\eta \to \infty$)

$$g_p(\eta) \to \frac{\eta}{\sqrt{p}} e^{\mathrm{i}p\eta} \Rightarrow B_p \to 0$$

Все хорошо?

КТП: Пространство де Ситтера, Взаимодействия

$$\mathcal{L}_{int} = \lambda \phi^3$$

$$D^K(\eta_1, \eta_2, |\vec{x} - \vec{y}|) = \frac{1}{2} \left\langle \{\phi(\eta_1, \vec{x}),\, \phi(\eta_2, \vec{y})\} \right\rangle$$

$$d^K(p\eta_1,\, p\eta_2) = (\eta_1\, \eta_2)^{-\frac{3}{2}} \int d^3 r\, D^K(\eta_1, \eta_2, \vec{r})\, e^{-\mathrm{i}\,\vec{p}\,\vec{r}}$$

$$\begin{aligned} d_0^K(1,2) \quad = \quad & \frac{1}{2} \left[h(p\eta_1) h^*(p\eta_2) + h^*(p\eta_1) h(p\eta_2)\right] \left(1 + 2\, \left\langle a_p^+\, a_p \right\rangle\right) + \\ & + h(p\eta_1)\, h(p\eta_2)\, \left\langle a_p\, a_{-p} \right\rangle + \\ & + h^*(p\eta_1)\, h^*(p\eta_2)\, \left\langle a_p^+\, a_{-p}^+ \right\rangle \end{aligned}$$

КТП: Пространство де Ситтера, Одна петля

ИК-предел: $p\eta \to 0, \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} = const(\sqrt{\eta_1\eta_2} = \eta)$
Для вакуума Банча-Дэвиса

$$\begin{aligned} n_p = \left\langle a_p^+ \, a_p \right\rangle \quad &\propto \quad \lambda^2 \log\left(p\eta\right) \\ \kappa_p = \left\langle a_p \, a_{-p} \right\rangle \quad &\propto \quad \lambda^2 \log\left(p\eta\right) \end{aligned}$$

Нужно суммировать все лидируюшие ИК вклады!